

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 6 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 241—288

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Zermelo, E.: Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme. I. Fundam. Math. 25, 136—146 (1935).

Die Untersuchungen, von denen der Autor 1931 in Bad Elster Mitteilung machte (Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41, 85 ff.), werden ausgeführt. Zunächst werden die wichtigsten Eigenschaften einer „fundierenden Relation“ (vgl. Fundam. Math. 16, 29 ff.) entwickelt (ein Bereich S heißt durch die binäre Relation f wohlfundiert, wenn jeder nicht verschwindende Unterbereich $T \subset S$ mindestens ein Element t_0 enthält, das zu keinem Element t von T in der Beziehung $t f t_0$ steht). Die Anwendung auf die Theorie mathematischer (deduktiver) Satzsysteme geschieht, indem f als „teilweise Begründung“ interpretiert wird: $a f p$, wenn unter anderem die Wahrheit von a zur Begründung der Wahrheit von p benutzt ist; die „Begründung“ wird dabei in folgender Weise definiert: Gegeben sei ein Bereich von Gegenständen und gewisse Relationen. Aus den Sätzen, die bei Ausfüllung der Leerstellen dieser Relationen durch Gegenstände entstehen („Basis“), gehen durch Negation und durch (endliche oder unendliche) Konjunktion und Disjunktion schrittweise immer neue Sätze hervor. Eine willkürliche Verteilung der Prädikate „wahr“, „falsch“ auf die Sätze der Basis führt eindeutig zu einer „Wahrheitsverteilung“ für alle Sätze des Systems nach den folgenden drei syllogistischen Regeln: Jede Konjunktion und jede Disjunktion wahrer (bzw. falscher) Sätze ist wahr (bzw. falsch); jede Konjunktion (bzw. Disjunktion) teils wahrer, teils falscher Sätze ist falsch (bzw. wahr); jede Negation eines wahren (bzw. falschen) Satzes ist falsch (bzw. wahr). — Zur Charakterisierung des hieraus fließenden Beweisbegriffes ist die Bemerkung wichtig: „Ein solcher ‚Beweis‘ enthält zumeist unendlich viele Zwischensätze, und es ist noch nicht gesagt, inwieweit und durch welche Hilfsmittel er auch unserem endlichen Verstande einleuchtend gemacht werden kann. — Feste Grenzen der Verständlichkeit gibt es hier augenscheinlich nicht.“ Einige grundlegende Eigenschaften des auf den drei syllogistischen Regeln fußenden Kalküls werden aufgezeigt, und eine in Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41 angegebene Behauptung betreffs im Zermeloschen Sinn kategorischer Sätze wird bewiesen. Wie der Autor bemerkt, stellt die vorliegende Arbeit den Anfang einer noch nicht abgeschlossenen Untersuchung dar, die die Begründung einer „infinististischen Syllogistik und Beweistheorie“ zum Ziele hat. *Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Church, Alonzo: A proof of freedom from contradiction. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 275—281 (1935).

Durch weitgehende Einschränkungen an seinem früheren System erhält Verf. ein neues mit nur drei Grundbegriffen, nämlich: 1. der Operation der „Anwendung“ einer Funktion auf ein Argument, 2. der „Identität“, 3. der variablen bindenden Operation „ λx “, welche aus einem Ausdruck mit der freien Variablen x die durch ihn definierte Funktion erzeugt. Dieses System kann einerseits noch finit als widerspruchsfrei erwiesen werden und ist andererseits so umfassend, daß jede durch Rekursion (beliebig hoher Ordnung) definierte zahlentheoretische Funktion in ihm enthalten ist, d. h. zu jeder solchen Funktion φ gibt es eine Formel F des Systems, so daß, wenn n eine beliebige nat. Zahl und $m = \varphi(n)$ ist, die Formel $F(n) = m$ beweisbar ist, wobei die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... usw. durch folgende Formeln ausgedrückt werden: $\lambda f x \cdot f(x)$, $\lambda f x \cdot f(f(x))$, $\lambda f x \cdot f(f(f(x)))$... usw. (vgl. dies. Zbl. 8, 289). Die Zahlen 1, 2 werden gleichzeitig als Wahrheitswerte „falsch“, „wahr“ verwendet und die Operationen des Aussagenkalküls als zahlentheoretische Funktionen

durch Definition eingeführt. Die Formel 2 ist das einzige Axiom, und die Schlußregeln (die Verf. „Konversionen“ nennt) sind sämtlich umkehrbar, so daß eine Formel dann als bewiesen gilt, wenn sie in 2 konvertiert werden kann. Der Alloperator tritt nicht als Grundbegriff auf, sondern wird vertreten durch gewisse mittels der drei Grundbegriffe aufgebaute Formeln Π mit der Eigenschaft, daß $\Pi(F, G)$ dann und nur dann beweisbar ist, wenn $G(x)$ aus $F(x)$ vermittle gewisse von den Konversionen i. a. verschiedenen Schlußregeln abgeleitet werden kann. Zufolge der Tatsache, daß jedes formale System unvollständig ist, kann eine transfinite Folge immer schärferer Schlußregeln und dementsprechend eine transfinite Folge verschiedener Allooperatoren definiert werden. Es wird vermutet, daß diese den verschiedenen Ordnungen des Beweises durch vollständige Induktion entsprechen. *K. Gödel.*

Lusin, Nicolas: Sur un raisonnement nouveau dans la théorie des fonctions descriptive. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 638—640 (1935).

Cette note se rattache aux considérations philosophiques de l'école française dite „réaliste“ ou „empiriste“, qui, sans se décider à une reconstruction comme la veut M. Brouwer, préfère les méthodes constructives. — On dit qu'un nombre réel ξ est nommé au sens de M. Lebesgue, si ξ existe (au sens classique, non constructif) et si deux nombres qui satisfont à la définition de ξ sont nécessairement identiques. En partant d'un crible élémentaire plan C qui définit un ensemble linéaire complémentaire analytique E , M. Lusin montre comment on peut nommer un point ξ dans E ; cependant, on ne peut pas calculer même la première décimale de ξ , puisque pour cela il faudrait parcourir tous les nombres transfinis de seconde classe. *A. Heyting* (Enschede).

Steck, Max: Vom Sinn der Mathematik. Z. ges. Naturwiss. **1**, 330—334 (1935).

Bouligand, Georges: Sur la stabilité des propositions mathématiques. (II. comm.) Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 776—779 (1935).

Darlegung des Stabilitätsbegriffes an Beispielen aus der mathematischen Physik (Definition s. dies. Zbl. **11**, 98). *W. Feller* (Stockholm).

Destouches, Jean-Louis: Les espaces abstraits en logique et la stabilité des propositions. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 780—786 (1935).

Bünning, Erwin: Sind die Organismen mikrophysikalische Systeme? (Entgegnung an P. Jordan.) Erkenntnis **5**, 337—347 (1935).

An vielen Beispielen wird gezeigt, daß selbst bei den empfindlichsten biologischen Reaktionen etwa 10^4 Molekeln bzw. Lichtquanten beteiligt sind. Mikroskopische Vorgänge der Biologie seien noch keine Mikrovorgänge im Sinne der Quantenmechanik. Jordans Verstärkertheorie des Lebens und die ähnlichen Auffassungen von Alverdes seien daher abzulehnen. *E. Zilsel* (Wien).

Jordan, Pascual: Ergänzende Bemerkungen über Biologie und Quantenmechanik. Erkenntnis **5**, 348—352 (1935).

Die früheren Darlegungen des Verf. werden gegen einige auf der Prager Vorkonferenz 1934 erhobene Einwände verteidigt. *E. Zilsel* (Wien).

Geschichtliches.

Neugebauer, O.: Der Verhältnisbegriff in der babylonischen Mathematik. *Analecta Orientalia* **12**, 235—258 (1935).

An dem Beispiel eines Aufgabentextes wird die Methode vorgeführt, nach der man mit Ausnutzung der in dem vorgelegten Text sichtbaren Systematik zum Verständnis des Inhalts gelangen kann, ohne daß vorher die Bedeutung aller Termini bekannt ist. Umgekehrt erschließt man auf diesem Wege manche Wortbedeutungen; in diesem Falle ergibt sich das Vorhandensein eines Ausdrucks für „Verhältnis zweier Größen“, was mathematikgeschichtlich von höchster Bedeutung ist. *Bessel-Hagen.*

Bortolotti, Ettore: La scienza algebrica degli Egizi e dei Babilonesi. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, IX. s. **2**, 27—51 (1935).

● **Luria, S.:** Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten. (Abh. d. Inst. f. Gesch. d. Wiss. u. d. Techn. Reihe 2, H. 5.) Moskau u. Leningrad: Verl. d. Akad. d. Wiss. d. UdSSR. 1935. 200 S. u. 13 Abb. Rubel 7.— [Russisch].

● **Weinberg, Josef:** Die Algebra des Abū Kāmil Šōgā' ben Aslam. München: Salesianische Offizin 1935. 144 S. u. 42 Fig. RM. 30.—

Soga (um 900) gehört der älteren arab. Mathematikergeneration an. Seine „Algebra“ wird nun nach einem hebr. Ms. der Staatsbibl. München hier in Übersetzung vorgelegt. In einer Einleitung (11 S.) wird über den Inhalt kurz referiert und die Terminologie zusammengestellt, schließlich der Einfluß auf Leonardo P. hervorgehoben. Für diese Fragen vgl. auch die dies. Zbl. 9, 388 ref. Arbeit von TROPFKE. In der Übersetzung sind die einzelnen Beispiele auch in Formeln umschrieben. Meist dreht es sich um quadratische Gleichungen oder um einfache Verteilungsaufgaben, alles in numerischen Beispielen durchgeführt. Manchmal sind auch geometrisch formulierte Scheinbeweise gegeben, offensichtlich mit Rücksicht auf eine an Euklid anschließende Tradition (s. auch die zit. Arbeit von TROPFKE). Die Kenntnis dieses Werkes von Soga wird für viele Fragen der Frühgeschichte der Algebra von Wichtigkeit sein. Um so mehr ist zu bedauern, daß der Verf. sich mit der Veröffentlichung einer Übersetzung begnügt hat, statt eine wirkliche Edition des Textes zu veranstalten, in der man natürlich auch etwas über die Textgeschichte und die Varianten zweier Pariser Handschriften erfahren müßte.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

● **Nielsen, Niels:** Géomètres français du dix-huitième siècle. Paris: Gauthier-Villars 1935. 444 pag. Fros. 40.—

Almeida e Vasconcelos, Fernando de: Daniel Augusto da Silva und die Entwicklung der Astatik (1814—1878). An. Asoc. españ. Progr. Ci. 1, 235—251 (1934) [Portugiesisch].

Nach einer kurzen Beschreibung der äußeren Lebensgeschichte des portugiesischen Mathematikers wird seine wissenschaftliche Entwicklung auf Grund eines von ihm an G. Teixeira gerichteten und von G. Teixeira im Jahre 1902 veröffentlichten Briefes (Bol. da Direcção Geral da Instr. Publ. 1) dargestellt. Zwei Arbeitsperioden werden durch eine längere Krankheit unterbrochen. Die wichtigste der drei Arbeiten der ersten Periode ist Memória sobre a rotação das forças em torno dos pontos de aplicação (Mem. Acad. das Ciências de Lisboa 1850). Sie enthält einige die Grundlagen der Astatik betreffende Sätze, die von G. Darboux 1877 wiedergefunden wurden [Mém. Soc. de Sc. Ph. et Nat. de Bordeaux, II. s. 2 (1878)]. Obwohl gleich eine Prioritätsforderung in der Zeitschrift Les Mondes von Moigno veröffentlicht wurde, blieb die portugiesische Arbeit fast unbekannt, bis F. de Vasconcelos auf Veranlassung von G. Teixeira in einer französischen Arbeit [Sur la rotation des forces autour de leurs points d'application et l'équilibre statique. Ann. Ac. Polytechn. do Porto 7 (1912); vgl. Jb. Fortschr. Math. 43, 801 (1912)] auf sie hinwies. Es wird eine Besprechung dieser Arbeit gegeben, welche die Grundlagen der Astatik, so wie sie von Minding, Möbius (die in Portugal eher bekannt waren als in Frankreich), de Silva und Darboux herrühren, vom historischen Standpunkte aus behandelt. Auszüge aus Briefen von de Silva.

E. A. Weiss (Bonn).

Rey Pastor, J.: Die Mathematik des 20. Jahrhunderts. I. Das Integral. An. Asoc. españ. Progr. Ci. 1, 13—24 (1934) [Spanisch].

Berzolari, L.: Die Mathematik des 20. Jahrhunderts. II. Algebraische Korrespondenzen. An. Asoc. españ. Progr. Ci. 1, 25—28 (1934) [Spanisch].

Somayajulu, D. A.: Drikkarma correction in Hindu astronomy. Math. Student 3, 60—65 (1935).

● **Schmidt, Fritz:** Geschichte der geodätischen Instrumente und Verfahren im Altertum und Mittelalter. (Veröff. d. Pfälz. Ges. z. Förderung d. Wiss. Bd. 24.) Neustadt a. d. Haardt: Pfälz. Ges. z. Förderung d. Wiss. 1935. 400 S. u. 26 Taf. RM. 10.—

Es handelt sich hier um eine hervorragend nützliche und sorgfältige Sammelarbeit, die ein ungeheures und schwer zugängliches Material systematisch ordnet und in praxi auch einen Führer durch die einschlägige Literatur darstellt (fast 1400 Fußnoten). Ein entsprechendes Werk über die Zeichen- und Konstruktionsinstrumente ist geplant. Der vorliegende Band

enthält Geschichte und Anwendungen der folgenden Instrumente: Nivellierungsinstrumente, Instrumente zum Antragen eines rechten Winkels, Längenmesser, Stäbe und Stabzusammenstellungen als Instrumente zur mittelbaren Streckenbestimmung, die Instrumente mit dem Schattenquadrat (Astrolab), Jakobsstab, Triangulierungsinstrumente, Schmiegen. Es liegt in der Natur der Sache, daß ein solches Werk sich oftmals mit der Benutzung sekundärer Quellen begnügen muß. Dies macht sich hier insbesondere bei Angaben über die babylonische Astronomie und Metrologie geltend, wo nur ganz veraltete Literatur berücksichtigt wird.
O. Neugebauer (Kopenhagen).

Algebra und Zahlentheorie.

Oakley, C. O.: *Semi-linear equations*. Tôhoku Math. J. 41, 52—69 (1935).

The author investigates the question of representation of perimeters and areas of plane polygons by means of semi-linear equations of the type (*) $u_0 + \sum_i^n m_i |u_i| = 0$

where the u 's are distinct linear (non-homogeneous) forms in (x, y) and the constants m_i are all distinct from 0. The number n is called the order of the semi-linear equation (*). The author undertakes a systematic treatment of the theory of which some fragmentary results were known to Söderblom (1899) and Riabushinsky (1914). Among other results it is proved: (I) For the perimeter of each convex $(n+3)$ -gon there exists a semi-linear equation of each given order $p \geq n+1$, $n \geq 1$, $(n+1)$ being the least order which can be used for all convex $(n+3)$ -gons. (II) For an arbitrary triangle this order can not be made less than six. (III) For each convex n -polygonal area there exists a semi-linear equation of order n . Various cases of non-convex polygons are also investigated.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Waerden, B. L. van der: *Die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe als Permutationsgruppen*. Math. Ann. 111, 731—733 (1935).

In Verallgemeinerung eines Satzes von E. Artin wird bewiesen: Es seien x_1, \dots, x_n die Wurzeln einer Gleichung in einem Zahl- oder Funktionenkörper P , ferner p ein Primideal von P und \mathfrak{P} ein Primeiler von p im Körper $\Omega = P(x_1, \dots, x_n)$; dann besteht folgender Zusammenhang zwischen der Zerlegung von p im Körper $P(x_1)$ und der Darstellung der Zerlegungsgruppe \mathfrak{Z} und der Trägheitsgruppe \mathfrak{T} von \mathfrak{P} als Permutationsgruppen: Zerfällt p in $P(x_1)$ in der Form $p = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$, wo die p_i voneinander verschiedene Primideale von den Geraden f_i sind, so zerfallen die Wurzeln x_1, \dots, x_n gegenüber \mathfrak{Z} in r Transitivitätsgebiete zu je $e_i f_i$ Wurzeln, welche gegenüber \mathfrak{T} in je f_i Transitivitätsgebiete zu je e_i Wurzeln zerfallen. Als Anwendung wird ein Kriterium für affektfreie Gleichungen abgeleitet, welches schon früher für den Grad 5 vom Verf. für beliebigen Primzahlgrad von A. Scholz formuliert worden ist: Wenn in der Diskriminante eines ganzzahligen Polynoms $f(x)$ eine Primzahl genau in der 1. Potenz vorkommt, so ist die Galoissche Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ entweder die symmetrische, oder sie ist intransitiv oder imprimitiv. Taussky (Cambridge).

Neumann, J. von, and M. H. Stone: *The determination of representative elements in the residual classes of a Boolean algebra*. Fundam. Math. 25, 353—378 (1935).

H. Stone [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 20, 197—202 (1934); 21, 103—105 (1935); dies. Zbl. 10, 81; 11, 51] hat die Isomorphie der Booleschen Algebren (das sind Ringe, in denen jedes Element idempotent ist) mit gewissen Mengensystemen nachgewiesen, wobei den mengentheoretischen Operationen symmetrische Differenz, Durchschnitt, Vereinigung zweier Mengen, Komplementärmengenbildung die algebraischen Operationen $a+b$, $a \cdot b$, $a \wedge b = a + b + ab$, $a' = a + e$ entsprechen, e das Einheits-element des Ringes. Diese Isomorphie ermöglicht die Anwendung der Methoden, die J. v. Neumann [J. reine angew. Math. 165, 109—115 (1931); dies. Zbl. 3, 106] für meßbare Funktionen entwickelt hat, auf die Booleschen Ringe A . Es wird das (A, a) -Darstellungsproblem untersucht: a sei Ideal in A . Läßt sich in jeder Restklasse von A/a ein Repräsentant so auswählen, daß alle diese Repräsentanten einen zu A/a isomorphen

Teilring von A bilden? Es werden hinreichende Bedingungen aufgestellt. Das Problem ist u. a. lösbar 1. wenn \mathfrak{a} Hauptideal ist, 2. wenn zu jeder Menge \mathfrak{b} von Elementen aus \mathfrak{a} , von kleinerer Mächtigkeit wie A/\mathfrak{a} , in \mathfrak{a} ein Element existiert, das die Vereinigungsmenge der Elemente von \mathfrak{b} darstellt. Es werden Fälle angegeben, in denen das Problem unlösbar bzw. dann und nur dann lösbar ist, wenn die Kontinuums-hypothese zutrifft.

Köthe (Münster i. W.).

Akizuki, Yasuo: Einige Bemerkungen über primäre Integritätsbereiche mit Teilerkettensatz. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 327—336 (1935).

W. Krull [Math. Ann. 103, 450—465 (1930)] hat mit Hilfsmitteln der Bewertungstheorie folgende Sätze bewiesen: 1. I sei ein primärer Integritätsbereich, O der bezüglich I ganz abgeschlossene Teilring des Quotientenkörpers von I . Genügt I dem Teilerkettensatz, so besitzt O nur endlich viele Primideale. 2. Unter denselben Voraussetzungen ist O dann und nur dann endlicher I -Modul, wenn der zu I gehörige p -adisch abgeschlossene Ring kein nilpotentes Element enthält. Verf. beweist 1. und 2. rein idealtheoretisch unter Verwendung der Ergebnisse der anschließend referierten Arbeit. Daß O wirklich unendlicher I -Modul sein kann, wird an einem Beispiel aus p -adischen Zahlen gezeigt.

Köthe (Münster i. W.).

Akizuki, Yasuo: Teilerkettensatz und Vielfachenkettensatz. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 337—345 (1935).

Es wird bewiesen, daß in einem (kommutativen) Ring, der wenigstens einen Nicht-nullteiler enthält und in dem der Vielfachenkettensatz modulo jedes Ideals $\neq (0)$ gilt, stets auch der Teilerkettensatz erfüllt ist. Der Beweis stützt sich u. a. auf den Satz: Die Ringe, in denen der Produktkettensatz modulo jedes von (0) verschiedenen Ideals gilt, sind identisch mit den Ringen, in denen jedes Ideal kleinstes gemeinsames Vielfaches endlich vieler starker Primärideale ist, die zu teilerlosen Primidealen oder zum Einheitsideal gehören.

Köthe (Münster i. W.).

Grell, Heinrich: Über die Gültigkeit der gewöhnlichen Idealtheorie in endlichen algebraischen Erweiterungen erster und zweiter Art. Math. Z. 40, 503—505 (1935).

In dem Integritätsbereich \mathfrak{o} seien die Primideale mit den teilerlosen Idealen $\neq \mathfrak{o}$ identisch und jedes Ideal $\neq (0)$, \mathfrak{o} sei eindeutiges Potenzprodukt von Primidealen. Es wird bewiesen, daß diese Eigenschaften sich auf die Hauptordnung O jeder endlichen algebraischen Erweiterung des Quotientenkörpers von \mathfrak{o} übertragen. Dies war in der Literatur bisher nur unter Einschränkungen (Separabilität der Erweiterung u. ä.) bekannt. Beweis idealtheoretisch in engstem Anschluß an van der Waerden, Moderne Algebra II (Berlin 1931).

Köthe (Münster i. W.).

Schilling, Otto: Über gewisse Beziehungen zwischen der Arithmetik hyperkomplexer Zahlssysteme und algebraischer Zahlkörper. Math. Ann. 111, 372—398 (1935).

Verf. stellt sich die Aufgabe, algebraische und arithmetische Fragen der Zahlkörpertheorie mit Hilfe der bekannten Idealtheorie hyperkomplexer Zahlssysteme zu behandeln und damit die Untersuchungen von Chevalley, Hasse und E. Noether (dies. Zbl. 9, 393, 394, 195) weiterzuführen. Es werden nicht nur neue Resultate gewonnen, sondern auch schon bekannte Sätze neu bewiesen. — A sei eine einfache normale Algebra mit einem Zahlkörper k als Zentrum. Die Beziehungen zwischen den Ordnungen \mathfrak{D} eines maximal-kommutativen Teilkörpers K von A und den verschiedenen Maximalordnungen \mathfrak{M} von A werden eingehend studiert: Ist K/k von Primzahlgrad, so läßt sich eine Ordnung \mathfrak{D} genau dann als Durchschnitt $K \cap \mathfrak{M}$ darstellen, wenn der Führer \mathfrak{F} von \mathfrak{D} prim ist zu den Verzweigungsstellen \mathfrak{v} von A/k . Ferner werden die \mathfrak{M} -Erweiterungen der Ideale von $\mathfrak{M} \cap K$ charakterisiert und ihre Normen untersucht. Es ergibt sich ein Kriterium für die vollständige Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p} (\neq \mathfrak{v})$ in einem galoisschen Körper K : Es muß in A eine Zerlegung $\mathfrak{M}\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_n$ in einseitige Ideale geben, so daß für die Rechtsordnung \mathfrak{M}_1 von \mathfrak{P}_1 der Durchschnitt $\mathfrak{M}_1 \cap K$ gleich der Hauptordnung von K wird. — Nach E. Noether heißen \mathfrak{M}_1 und \mathfrak{M}_2 zum gleichen Gebiet gehörig, wenn $\mathfrak{M}_1 \cap K = \mathfrak{M}_2 \cap K$ und

$\mathfrak{M}_1^b = \mathfrak{M}_2^b$ (für alle Verzweigungsstellen b von A/k) erfüllt ist. Der Trennungssatz liefert eine Aussage über die Abhängigkeit der Gebietseinteilung vom zugrunde gelegten Körper K : Nichtisomorphe galoische Körper liefern wirklich verschiedene Gebiets-einteilungen. — Außer vielen anderen Sätzen wird z. B. gezeigt, daß sich zu jeder Maximalordnung \mathfrak{M} einer zerfallenden Algebra A ein maximal-kommutativer Teil-körper K finden läßt derart, daß $\mathfrak{M} \cap K$ gerade die Hauptordnung von K wird.

Ernst Witt (Göttingen).

Ljunggren, Wilhelm: Bemerkungen über die Lösung der unbestimmten Gleichung $x^2 - Dy^4 = 1$. Norsk mat. Tidsskr. 17, 73—74 (1935).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 11, 147) hatte Verf. Gebrauch von dem bereits früher von ihm bewiesenen Satz VI gemacht, diesen aber falsch zitiert. Dadurch werden die Ergebnisse dieser Arbeit in speziellen Fällen falsch; insbesondere bleibt Satz V nur für $C = 1$ und $C = 2$, nicht aber auch stets für $C = 4$ richtig. Mahler.

Rédei, L.: Über die Pellsche Gleichung $t^2 - du^2 = -1$. J. reine angew. Math. 173, 193—221 (1935).

Zunächst wird bewiesen, daß man sich bei der Untersuchung der Lösbarkeitsbedingungen der Gleichung $t^2 - du^2 = -1$ (*) auf den Fall beschränken kann, daß d quadratfrei oder genau einen Primfaktor zum Quadrat enthält. Ferner werden die Epsteinschen Sätze (dies. Zbl. 9, 295) aufs neue ohne Verwendung von Kettenbrüchen und in verschärfter Form bewiesen und verschiedene Folgerungen aus diesen Resultaten gezogen. — Um hinreichende und notwendige Bedingungen für die Zulässigkeit von α , d. h. für die Lösbarkeit von (*) zu formulieren, werden die beiden folgenden Sätze bewiesen: Satz 4: Ist d nicht zulässig und t, u die Fundamentallösung von $t^2 - du^2 = 1$, so ist $\sqrt{t + u\sqrt{d}} = xP_2\sqrt{P_1} + yQ_2\sqrt{Q_1}$ und $x^2P_1P_2^2 - y^2Q_1Q_2^2 = 1$, wobei x, y, P_1, P_2, Q_1, Q_2 eindeutig bestimmte positive ganze Zahlen sind, P_1, Q_1 quadratfrei, $(P_1P_2, Q_1Q_2) = 1$, $P_1P_2, Q_1Q_2 > 1$, $d = P_1P_2^2Q_1Q_2^2$ mit den Eigenschaften: $\left(\left(\frac{Q_1}{P_1P_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_1}{Q_1Q_2}\right)\right) = 1$ und $\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)_4 = 1$. [Dabei ist das Symbol $\left(\left(\frac{x}{y}\right)\right) = 1$, wenn das Kroneckersche Symbol $\left(\frac{x}{p}\right) = 1$ für jede Primzahl p/y ; $\left(\frac{x}{p}\right)_4$ ist für solche ganze rationale Zahlen definiert, für die folgendes erfüllt ist: y ist ein Produkt von Primzahlen $\equiv 3(4)$, für jedes dieser p ist x quadratischer Rest, für $2/y$ ist $x \equiv 1(4)$; ist p/y und p Norm der Zahl β aus $R(i)$, so wird $\left(\frac{\alpha}{p}\right)_4$ identifiziert mit dem 4. Potenzrestsymbol $\left(\frac{\alpha | R(i)}{\beta}\right)_4$, für $\beta = 1 + i$ mit $i^{\frac{\alpha-1}{4}}$, schließlich wird $\left(\frac{x}{y}\right)_4 = \prod_{p|y} \left(\frac{x}{p}\right)_4$

gesetzt.] Satz 6. d sei zulässig und $d = PQ$ mit $P, Q > 0$ und $(P, Q) = 1$. P_1 bzw. P_2 bedeute das Produkt der verschiedenen Primfaktoren von P , die in P in einer ungeraden bzw. geraden Potenz vorkommen und analog Q_1, Q_2 bezüglich Q . Dann gilt: Wenn $\left(\left(\frac{P_1P_2}{Q_1}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_1Q_1}{P_2}\right)\right) = \left(\left(\frac{P_2Q_1}{P_1}\right)\right) = 1$, ist auch $\left(\frac{P_1P_2}{Q_1}\right)_4 \left(\frac{P_1Q_1}{P_2}\right)_4 \left(\frac{P_2Q_1}{P_1}\right)_4 = \left(\frac{2P_1}{P_2}\right)$. — Mit e bzw. f wird ferner das Produkt derjenigen verschiedenen Primzahlen bezeichnet, die in d in ungerader bzw. gerader Potenz aufgehen. Ein Zahlenpaar $a, b = b, a$ wird eine gewöhnliche d -Zerfällung genannt, wenn a, b positiv ganz und $ab = e$. Ein Zahlenbeispiel $a, b, c = b, a, c$ wird eine d -Zerfällung genannt, wenn a, b eine gewöhnliche d -Zerfällung ist und c ein positiver Teiler von f . Die d -Zerfällung heißt von der 2. Art, wenn $\left(\left(\frac{ac}{b}\right)\right) = \left(\left(\frac{bc}{a}\right)\right) = \left(\left(\frac{ab}{c}\right)\right) = 1$. Mit Hilfe dieser Begriffe wird bewiesen: Satz 7. Ist $\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) = -1$ und ist für jede d -Zerfällung 2. Art $a, b, 1$ (a, b nicht beide $= 1$), $\left(\frac{a}{b}\right)_4 = \left(\frac{b}{a}\right)_4 = -1$, so ist d zulässig. Satz 8: Gibt es eine d -Zerfällung 2. Art mit $\left(\frac{ac}{b}\right)_4 \left(\frac{bc}{a}\right)_4 \left(\frac{ab}{c}\right)_4 = -\left(\frac{2a}{c}\right)$, so ist d nicht zulässig. Aus Satz 7 werden zahlentheoretische

Folgerungen gezogen, was deshalb naheliegt, weil aus $\left(\left(\frac{e}{f}\right)\right) = -1$ folgt, daß es keine d -Zerfällung 2. Art mit $c > 1$ gibt, woraus nach einem früheren Ergebnis des Verf. (dies. Zbl. 9, 51) folgt, daß es in der absoluten Klassengruppe (im engeren Sinne) von $R(\sqrt{d})$ keine durch 4 teilbare Invariante gibt. — Schließlich wird die interessante Frage behandelt, welche quadratischen Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ für $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ausschließlich zulässige Zahlen d darstellen. *Taussky* (Cambridge).

Chowla, Inder: A theorem on the addition of residue classes: Application to the number $\Gamma(k)$ in Waring's problem. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 2, 242—243 (1935).

Zwei folgende Sätze werden ohne Beweis mitgeteilt: 1. (Verallgemeinerung eines Satzes von Davenport, vgl. dies. Zbl. 10, 389) κ sei ganz positiv; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (bzw. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$) seien m (bzw. n) untereinander verschiedene Restklassen (mod κ); dabei sei $\beta_1 = 0$, und $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ seien prim zu κ ; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$ seien die untereinander verschiedenen Restklassen (mod κ), die sich in der Form $\alpha_i + \beta_j$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) darstellen lassen. Dann ist $l \geq m + n - 1$ im Fall $m + n - 1 \leq \kappa$ und $l = \kappa$ anderenfalls. — 2. Es sei $s \geq 4\kappa$, und die ganzen Zahlen α_r ($1 \leq r \leq s$) seien prim zu a . Dann enthält jede arithmetische Reihe der Form $ax + m$ unendlich viel Zahlen der Form $\alpha_1 x_1^* + \dots + \alpha_s x_s^*$, wo die x_i ganz sind [im Fall $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 1$ von Hardy und Littlewood, *Math. Z.* 12, 186 (1922), bewiesen]. *A. Khintchine*.

Vinogradov, I.: Sur les sommes de M. H. Weyl. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 514 bis 516 (1935).

Verf. bietet ohne Beweis einige Sätze, die dem Ideenkreis des Waringschen Problems angehören. Die Abschätzungen, die Verf. bietet und die für das genannte Problem wesentlich sind, greifen viel tiefer als die bisher bekannten. (Unter anderem bietet Verf. folgenden Satz: „L'expression asymptotique donnée par MM. Hardy et

Littlewood pour le nombre des représentations d'un entier N sous la forme $N = \sum_{u=1}^r x_u^n$ a lieu pour tous les $r > 163(\lg n + 1)^2$.“ Ref. betont, daß in der Abschätzung von r wahrscheinlich n als Faktor auftreten muß (Druckfehler?); vgl. z. B. dies. Zbl. 10, 391.

Lubelski (Warschau).

Romanoff, N.: Über einen Satz der additiven Zahlentheorie. *Wiss. Ber. Moskauer Univ. H.* 2, 49—54 u. deutsch. Zusammenfassung 54 (1934) [Russisch].

n_1, n_2, n_3, \dots heißt Folge positiver Dichte, wenn die Ungleichung $\frac{N(x)}{x} > \alpha$ für alle genügend großen Werte von x erfüllt ist, wo $N(x)$ die Anzahl aller $n_i \leq x$ und α eine positive Konstante bezeichnet. Verf. beweist folgenden Satz: Die natürlichen Zahlen der Form $p + x^2$, wo p zu einer Folge von Primzahlen positiver Dichte gehören, bilden zugleich eine Folge positiver Dichte. Die Methode des Beweises ist dieselbe wie in N. Romanoff, Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie, *Math. Ann.* 109, 668—671 (1934); vgl. dies. Zbl. 9, 8; vgl. auch dies. Zbl. 10, 389.

Lubelski (Warschau).

Shah, S. M.: On the difference $\{\sigma_n(x) - \pi_n(x)\}$. *Indian Phys.-Math. J.* 6, 49—50 (1935).

If $\sigma_n(x)$ denotes the number of integers not exceeding x with n different prime factors, and $\pi_n(x)$ the number of these integers which are quadratfrei, the author proves that for $n \geq 3$,

$$\sigma_n(x) - \pi_n(x) \sim \frac{F_2}{(n-3)!} \frac{x(\log \log x)^{n-3}}{\log x},$$

where $F_2 = \sum p^{-2}$.

Davenport (Cambridge).

Khintchine, A.: Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes. *Math. Ann.* 111, 631—637 (1935).

Bekanntlich gibt es zu beliebigem reellem θ unendlich viele Paare ganzer $x > 0, y$ mit $|\theta x - y| < \frac{1}{\sqrt{5} \cdot x}$. Dieser Hurwitzsche Satz wird vom Verf. mit Hilfe von Fareybrüchen in wenigen Zeilen von neuem gezeigt. Er zeigt ferner (in einigen elementaren

Fallunterscheidungen): a) Zu jedem irrationalen θ , jedem reellen α und jedem positiven ε gibt es unendlich viele Paare ganzer $x > 0, y$ mit

$$|\theta x - y - \alpha| < \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{5} \cdot x}. \quad (1)$$

b) Sind die Teilnehmer des regelmäßigen Kettenbruchs für θ nicht beschränkt, so darf man die Zahl $\sqrt{5}$ auf der rechten Seite von (1) durch 3 ersetzen. — [Läßt man die Forderung $x > 0$ in a) weg und ist α nicht eine Zahl der Gestalt $p\theta - q$ mit ganzen p und q , so darf man (1) nach Minkowski bekanntlich durch $|\theta x - y - \alpha| < \frac{1}{4|x|}$ ersetzen.]

J. F. Koksma (Amsterdam).

Ricci, Giovanni: Sul settimo problema di Hilbert. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 4, 341—372 (1935).

Durch Verallgemeinerung der Gelfondschen Methode (s. dies. Zbl. 9, 53—54 und 10, 393) kommt Verf. zu folgendem sehr allgemeinen Satz über die Transzendenz von Potenzen: „Seien $\{\xi_r\}, \{\eta_{1r}\}, \dots, \{\eta_{kr}\}$ $k+1$ konvergente Folgen algebraischer Zahlen ($r = 1, 2, 3, \dots$) mit den Grenzwerten $\xi, \eta_1, \dots, \eta_k$; jedoch sei $\xi \neq 0, \xi \neq 1$. Für jedes r bezeichne g_r den Grad des kleinsten durch $\xi_r, \eta_{1r}, \dots, \eta_{kr}$ erzeugten algebraischen Zahlkörpers K_r ; x_r bzw. y_r die kleinste natürliche Zahl, so daß $x_r \xi_r$ bzw. $y_r \eta_{1r}, \dots, y_r \eta_{kr}$ ganz algebraisch sind; X_r bzw. Y_r das Maximum der Absolutbeträge von ξ_r und seinen Konjugierten bzw. von $\eta_{1r}, \dots, \eta_{kr}$ und allen hierzu konjugierten Zahlen; Λ_r die obere Grenze der positiven Zahlen λ , für die es keine $k+1$ ganzen rationalen Zahlen c_0, c_1, \dots, c_k mit

$$c_0 + c_1 \eta_{1r} + \dots + c_k \eta_{kr} = 0, \quad |c_0| \leq \lambda, |c_1| \leq \lambda, \dots, |c_k| \leq \lambda, \quad \sum_0^k |c_h| > 0$$

gibt; δ_r das $\max(|\xi - \xi_r|, |\eta_1 - \eta_{1r}|, \dots, |\eta_k - \eta_{kr}|)$; ϱ, σ, θ drei positive Zahlen mit $0 < \varrho < \varrho + \sigma < 1, \theta > 1 + \frac{1}{k}$. Ist dann für $r \rightarrow \infty$

$$\left(g_r^{-\frac{1}{k}} \log \frac{1}{\delta_r}\right)^{\frac{1}{k\theta}} = O(\Lambda_r), \quad g_r^{1/k} (g_r \log(e y_r Y_r))^{\theta/\varrho} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right),$$

$g_r^{1/k} (g_r \log(e x_r X_r))^{\theta/\sigma} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right), \quad g_r^{1/k} (g_r^2 \log(e y_r Y_r))^{\theta_1} = o\left(\log \frac{1}{\delta_r}\right) \quad \left(\theta_1 = \frac{k\theta}{k\theta - k - 1}\right),$
so ist mindestens eine der k Zahlen $\xi^{\eta_1}, \xi^{\eta_2}, \dots, \xi^{\eta_k}$ transzendent.“ Durch Spezialisierung folgt hieraus (neben dem Gelfondschen Satz) z. B. das folgende bemerkenswerte Ergebnis: „Seien ξ und η algebraisch, η irrational. Ist erstens $\xi \neq 0$ und $\xi \neq 1$, ferner α eine (Liouvillesche) Zahl, die unendlich viele Näherungen p_r/q_r mit

$$|\alpha - p_r/q_r| < 1/|q_r|^\omega \quad (\omega = \log^{2+\varepsilon}|q_r|, \varepsilon > 0 \text{ unabhängig von } r)$$

hat, so ist $\xi^{\eta\alpha}$ transzendent. Ist zweitens α eine (Liouvillesche) Zahl, die unendlich viele Näherungen p_r/q_r mit

$$|\alpha - p_r/q_r| < 1/|q_r|^\tau \quad (\tau = \log^{1+\varepsilon}|q_r|, \varepsilon > 0 \text{ unabhängig von } r)$$

hat und ist $\xi\alpha \neq 0$ und $\xi\alpha \neq 1$, so ist $(\xi\alpha)^\eta$ transzendent.“ Dieser Satz liefert also die Transzendenz angebarbarer nichtabzählbar unendlich vieler Potenzen mit festem algebraischem Exponenten oder mit fester algebraischer Basis.

Mahler.

Gruppentheorie.

Zassenhaus, Hans: Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien. Math. Ann. 111, 748—759 (1935).

Es sei $G(q, n)$ der n -dimensionale projektive Raum mit Koeffizienten aus dem genau q Elemente enthaltenden endlichen Körper. Die Gruppe A der Automorphismen von G , d. h. der eindeutigen, Geraden auf Geraden abbildenden Abbildungen von G auf sich, enthält den Normalteiler L der linearen Abbildungen; die linearen

Abbildungen der Determinante 1 bilden einen einfachen Normalteiler LF von A , der in jedem echten Normalteiler von A enthalten ist. LF ist eine zweifachtransitive Permutationsgruppe der $m = \sum_{i=0}^n q^i$ Punkte von $G(q, n)$. Entsteht G^* aus G durch Hinzufügen eines weiteren Elementes w , so wird unter einer transitiven Erweiterung einer (transitiven) Gruppe P von Permutationen von G eine Gruppe E von Permutationen von G^* derart verstanden, daß die w festhaltenden Permutationen aus E genau die Gruppe P bilden. Dann existieren transitive Erweiterungen einer LF enthaltenden Automorphismengruppe von G dann und nur dann, wenn entweder $q = 2$ oder $q = 4$, $n = 2$ und der Index der fraglichen Automorphismengruppe über LF entweder 1 oder 2 ist. Die transitive Erweiterung im Falle $q = 2$ besteht aus den linearen (homogenen und inhomogenen) Transformationen der $n + 1$ dimensional Vektoren, die von LF im Falle $q = 4$, $n = 2$ ist eine von Miller angegebene Gruppe, die eine transitive Erweiterung besitzende transitive Erweiterung besitzt. Schließlich ist die transitive Erweiterung der über LF den Index 2 habenden Automorphismengruppe von $G(4, 2)$ der Normalisator der genannten Millerschen Gruppe in der Gruppe aller Permutationen von 22 Elementen.

Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Miller, G. A.: Largest groups determined by the squares of their operators. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 479—481 (1935).

Der Verf. fragt nach umfassendsten, unzerlegbaren Gruppen, in denen die Quadrate eine gegebene Gruppe \S erzeugen. Wenn in irgendeiner Gruppe \mathfrak{G} die Quadrate \S erzeugen, so läßt sich \mathfrak{G} dann und nur dann in eine größte durch \S bestimmte Gruppe einbetten, wenn \S kein Zentrums-element von \mathfrak{G} mit der Ordnung 2 enthält. Außerdem werden Beispiele von größten Gruppen, deren Quadrate Gruppen mit bekanntem Typus erzeugen, konstruiert.

Zassenhaus (Rostock).

Turkin, W. K.: Über Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen. Math. Ann. **111**, 743—747 (1935).

Es werden zunächst monomiale Darstellungen einer endlichen Gruppe \mathfrak{G} betrachtet, bei welchen den Elementen von \mathfrak{G} Substitutionen $x'_k = T_{ik} x_i$ entsprechen, wobei die x'_k gleich den x_k in einer anderen Reihenfolge sind und die T_{ik} Elemente einer endlichen Gruppe \mathfrak{T} bedeuten. Es wird gezeigt, daß alle derartigen monomialen Darstellungen von \mathfrak{G} äquivalent sind mit solchen, die erhalten werden können, indem gewisse Komplexe von Elementen von \mathfrak{G} als Substitutionsvariable x_i eingeführt werden; \mathfrak{T} ist dann isomorph mit einer Faktorgruppe $\mathfrak{S}/\mathfrak{R}$, wobei \mathfrak{S} eine (beliebige) Untergruppe von \mathfrak{G} , \mathfrak{R} irgendeine invariante Untergruppe von \mathfrak{S} ist. Ist \mathfrak{T} abelsch, so läßt sich die Determinante einer monomialen Substitution definieren; dieselbe wird dann ein Element von \mathfrak{T} . Gibt es in einer monomialen Darstellung von \mathfrak{G} Substitutionen, deren Determinante nicht das Einheits-element 1 der zugehörigen Gruppe \mathfrak{T} ist, so bilden die Substitutionen mit der Determinante 1 einen echten Normalteiler von \mathfrak{G} , falls \mathfrak{G} nicht abelsch ist. Als Anwendung wird bewiesen: Hat die Untergruppe \mathfrak{H} von \mathfrak{G} die Ordnung h und den Index s , ist $(s, h) = 1$ und t der Index der Kommutatorgruppe \mathfrak{H}' von \mathfrak{H} in \mathfrak{H} und ist q der kleinste Primteiler von s , so ist \mathfrak{G} nicht einfach, falls in den in \mathfrak{G} mit \mathfrak{H} konjugierten Untergruppen mehr als $hs \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{q} \right)$ Elemente enthalten sind.

Magnus (Frankfurt a. M.).

Ado, I. D.: Über die Darstellung von S. Lieschen Gruppen durch lineare Substitutionen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 7—8 (1935).

The author proves that whatever be the structure of a Lie group there always exists an isomorphic linear group. The proof depends on the notion of "complete outer centrum" developed in his previous paper (see this Zbl. **10**, 394).

M. S. Knebelman (Princeton).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Chow, Shao-Lien: Sur certains critères de divers ensembles discontinus dans l'espace euclidien à trois dimensions. Bull. Sci. math., II. s. 59, 263—273 (1935).

Es wird gezeigt: Ist E eine beschränkte perfekte Menge, so gibt es einen einfachen rektifizierbaren Kurvenbogen, der eine perfekte Teilmenge von E trägt. — Dieses leicht zu beweisende Lemma wird auf einige Arten negativ umschrieben durch Sätze vom Typus: Enthält jeder rektifizierbare Bogen höchstens abzählbar viele Punkte von E , so ist E abzählbar.

W. Feller (Stockholm).

Basey, R. E.: Simply connected sets. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 341—356 (1935).

Eine zusammenhängende Menge M wird vom Verf. einfach zusammenhängend genannt, wenn für je zwei Punkte A und B und jede abgeschlossene Menge L von M , welche A und B in M trennt (d. h. $M - L$ zerfällt in zwei fremde, relativ abgeschlossene Teilmengen, von denen eine A , die andere B enthält), auch eine zusammenhängende Menge $C \subset L$ existiert, welche A und B in M trennt. Setzt man in dieser Definition an Stelle der trennenden Menge beidemale eine solche A und B nicht enthaltende Menge von M , mit welcher jede A und B enthaltende abgeschlossene zusammenhängende Menge von M einen nichtleeren Durchschnitt hat, so erhält man den Begriff einer schwach einfach zusammenhängenden Menge. Ist M metrisch und schwach einfach zusammenhängend, so auch unikohärent im Sinne von Vietoris (Proc. Amsterd. 29, 445) und Kuratowski (Fundam. Math. 13, 308). Verf. gibt weiter zahlreiche Kriterien für einfachen und schwach einfachen Zusammenhang, beweist einige neue Trennungssätze und gibt neue Beweise und Verallgemeinerungen einiger bereits bekannter Trennungssätze.

Nöbeling (Erlangen).

Whyburn, G. T.: On sequences and limiting sets. Fundam. Math. 25, 408—426 (1935).

Eine eingehende Untersuchung der Struktur der Limites abgeschlossener Teilmengen eines kompakten metrischen Raumes in den topologisch wichtigsten Fällen. Damit $A = \lim A_n$ ein γ^r -Kontinuum (d. h. jeder r -dimensionale Vollzykel in A ε -homolog 0 in A) sei, ist notwendig und hinreichend, daß es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gebe derart, daß für fast alle $n = 1, 2, \dots$ jeder r -dimensionale δ -Zykel in A_n ε -homolog 0 in A_n ist. Damit A lokal γ^r -zusammenhängend sei (d. h. für irgendein $\eta > 0$ ein $\vartheta > 0$ existiere derart, daß jeder r -dimensionale Vollzykel vom Durchmesser $< \vartheta$ homolog 0 in einer Teilmenge von A vom Durchmesser $< \eta$ sei), ist es notwendig und hinreichend, daß es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gebe derart, daß für irgendein $\eta > 0$ ein $\vartheta > 0$ existiere, so daß für fast alle n jeder r -dimensionale δ -Zykel vom Durchmesser $< \vartheta$ in A_n ε -homolog 0 in einer Teilmenge von A_n vom Durchmesser $< \eta$ ist. Es wird folgender Begriff einer r -Regularität für Folgen abgeschlossener Mengen eingeführt: Eine Konvergenz von A_n gegen A heißt r -regulär, falls es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, daß für fast alle n jeder r -dimensionale Vollzykel in A_n vom Durchmesser $< \delta$ homolog 0 ist in einer Teilmenge von A_n vom Durchmesser $< \varepsilon$. Die 0-Regularität der Konvergenzen von $A_n + B_n$ gegen $A + B$ und $A_n B_n$ gegen AB hat diejenige der Konvergenz von A_n gegen A (also auch von B_n gegen B) zur Folge. Ein 0-regulärer Limes von γ^1 -Kontinuen ist stets ein γ^1 -Kontinuum. Ein 0-regulärer Limes K von lokal zusammenhängenden Kontinuen K_n (im Sinne von Hahn-Mazurkiewicz) ist ein lokal zusammenhängendes Kontinuum, und jede topologische Kreislinie (einfache geschlossene Kurve) $S \subset K$ bzw. topologische Strecke (einfacher Bogen) $\overline{ab} \subset K$ ist ein 0-regulärer Limes von ebensolchen Kurven $S_n \subset K_n$ bzw. Bögen $\overline{a_n b_n} \subset K_n$ mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Umgekehrt ist ein mehrpunktiger 0-regulärer Limes beliebiger topologischer Kreislinien bzw. topologischer Strecken $\overline{a_n b_n}$ stets eine topologische Kreislinie bzw. topologische Strecke mit Endpunkten $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$. Ein ebensolcher Limes von topologischen Sphären bzw. von 2-Zellen (topologischen Kreisen) mit gegen 0 konvergierendem Durchmesser

der Randkreislinien ist stets ein 2-Kaktoid, d. h. ein lokal zusammenhängendes Kontinuum, dessen (nichteinpunktige) sog. zyklische Elemente im Sinne von Verf. lauter topologische (2-dimensionale) Sphären sind. Ist insbesondere ein mehrpunktiger Limes von topologischen Sphären zugleich ein 0- und 1-regulärer, so ist er selbst eine topologische Sphäre. Die Arbeit gipfelt in einer Bestimmung der genauen Struktur von 0- und 1-regulären Limites der 2-dimensionalen Zellenfolgen. Unter den Hilfergebnissen sind besonders die punktmengentheoretischen Charakterisierungen der 1-Kaktoiden (boundary curves) und der 2-Kaktoiden (cactoids) zu erwähnen.

B. Knaster (Warszawa).

Kempisty, Stefan: Sur les bornes des fonctions réelles. Bull. Soc. Math. France **63**, 91—120 (1935).

This article is principally concerned with developing an abstract theory which is the means of generalizing or yielding analogues to various theorems of Denjoy [Bull. Soc. Math. France **33**, 98 (1905); **43**, 165, 183 (1915)] and Hahn (Theorie der reellen Funktionen, Kap. 3. Berlin 1921) on boundaries of functions, and several theorems of Baire on pointwise discontinuous functions and on the limits of sequences of functions. This theory is that of an unconditioned set E and a fundamental operation φ subject to the condition that with every subset A of E there is associated a subset $\varphi(A)$ of E (this association signifying an abstraction of the interior of A). If $f(x)$ is a real function defined in E , $M_\varphi(f, a)$ denotes the φ -upper boundary of f at a ; it is defined as the lower boundary of the numbers y such that a belongs to $\varphi E_x[f(x) < y]$, i. e., the φ of the set of points x for which $f(x) < y$; $m_\varphi(f, a)$, the lower boundary of f at $a = -M_\varphi(-f, a)$. $f(x)$ is φ -upper- (lower) semi-continuous at a if $f(a) \geq M_\varphi(f, a)$ [$f(a) \leq m_\varphi(f, a)$]. The operation ψ is conjugate to φ if $\psi(A) = E - \varphi(E - A)$ for every A . φ is non-decreasing if $\varphi(A) \subset \varphi(B)$ for $A \subset B$; inferior, if $\varphi(A) \subset A$; recurrent, if $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$; multiplicative, if $\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(AB)$. φ_0 is the complete of φ if $\varphi_0(A)$ is the set of points x such that x belongs to $\varphi[A + (x)]$, (x) meaning the set consisting of the single element x . As an example of relations analogous to those of Denjoy, we have the inequalities

$$m_\varphi(f, a) \leq m_{\varphi\psi\varphi}(f, a) \leq \frac{m_{\varphi\psi}(f, a)}{m_{\psi\varphi}(f, a)} \leq m_{\psi\varphi\psi\varphi}(f, a) \leq m_\psi(f, a),$$

where ψ stands for the conjugate of φ , $\varphi\psi\varphi$ means the composite operation φ of the ψ of the φ , and similarly for the other juxtapositions of operational symbols. f is φ -doubly semi-continuous if it is both φ -upper- and φ -lower-semi-continuous. f is φ -continuous at a if for every pair of numbers b, c such that $b < f(a) < c$, a belongs to $\varphi E_x[b < f(x) < c]$. φ -double semi-continuity does not imply φ -continuity. A is φ -everywhere dense in E if $\varphi(A) = E$; f is φ -pointwise discontinuous if the set of points of φ -double semi-continuity is φ -everywhere dense. If φ_1 is non-decreasing and multiplicative, and if the set of points of φ_2 -double continuity is φ_1 -everywhere dense, we have

$$m_{\varphi_1} M_{\varphi_1}(f, x) \leq M_{\varphi_1} m_{\varphi_1}(f, x).$$

A is φ -open if $A \subset \varphi(A)$; φ -closed, if $E - A$ is φ -open. A is φ -compact if, for every infinite subset B , $\psi^0(B)$ is not empty, where ψ^0 is the conjugate of the complete of φ . φ is regularly compact if for every element of every open set G , there is an open, φ -compact set A containing o such that $\psi(A) \subset G$. We have the following generalization of a theorem of Baire: If φ is non-decreasing, recurrent, multiplicative and regularly compact, the relation

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) \leq M_\varphi m_\varphi(f, x)$$

is a necessary and sufficient condition for the φ -pointwise discontinuity of f . There follow, in terms of the preceding notions, generalizations of theorems of Baire on the limit of a sequence of continuous functions, and a theorem analogous to an abstract theorem of Hahn of related content.

Blumberg (Columbus).

Todd, John: Superpositions of functions. I: Transfinite superpositions of absolutely continuous functions. J. London Math. Soc. **10**, 166—171 (1935).

Jede monotone stetige Funktion f kann als eine Iteration der Ordnung ω von absolutstetigen Funktionen dargestellt werden. Ist dabei f selbst nicht absolutstetig, so kann die Ordnung ω nicht erniedrigt werden. Für die Definition von Iterationen transfiniter Ordnungen vgl. N. Bary, *Mémoire sur la représentation des fonctions continues*; Math. Ann. **103**, 185—248, 598—653 (1930). *A. Kolmogoroff* (Moskau).

Possel, René de: Sur la dérivation abstraite des fonctions d'ensembles. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 579—581 (1935).

There is considered a completely additive family of sets \mathfrak{E} in an abstract space E with a measure mE defined and uniformly bounded for the sets of \mathfrak{E} . To any point p in E a family of sets $V(p)$ of family \mathfrak{E} is attached such that for every $V(p)$ a number $r[V(p)] > 0$ is defined and that for any point p in E there exist sets $V(p)$ with $r[V(p)]$ arbitrarily small. The system \mathfrak{S} of all sets $V(p)$ for p in E is said to be a "système dérivant" whenever it satisfies the following condition: (B) If $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}$ is a collection of sets $V(p)$ such that for any p in E there exist $V(p)$ in \mathfrak{S}_1 with $r[V(p)]$ arbitrarily small; then, for every set $E \subset E$ and $\varepsilon > 0$, there are a sequence $\{p_n\}$ of points of E and a corresponding sequence $\{V_n\}$ of sets $V(p_n)$ of \mathfrak{S}_1 such that $mE = m\left(E \cdot \sum_n V_n\right)$ and $\sum_n V_n < mE + \varepsilon$. The system \mathfrak{S} is said to be a "système dérivant" in the strong sense if it has the property (B) with the additional condition that V_n should be without common points. — The author states four conditions equivalent to (B); one of these expresses the Lebesgue density theorem in an abstract form (with respect to the "système dérivant" \mathfrak{S}). If \mathfrak{S} is a "dérivant" in the strong sense then any completely additive and absolutely continuous function of sets of \mathfrak{S} is almost everywhere derivable (with respect to \mathfrak{S}) in E and is the Lebesgue indefinite integral of its derivative. As examples related to the Lebesgue measure on the plane are mentioned: the family of all squares ("système dérivant" in the strong sense) and the family of all rectangles with sides parallel to the axis ("système dérivant" in the weak sense).

Saks (Warszawa).

Jessen, Børge: Abstrakte Maß- und Integraltheorie. II. Mat. Tidsskr. B **1935**, 60 bis 74 [Dänisch].

Fortsetzung der Einführung in die Lebesguesche Theorie für abstrakte Mengen (vgl. dies. Zbl. **10**, 200; im Titel ist dort „Inhalts-“ durch „Integral-“ zu ersetzen). Die vorliegende Mitteilung enthält die eigentliche Integrationstheorie für Punktfunktionen, die Approximation letzterer durch Treppenfunktionen sowie einen Hilfssatz über äquivalente Funktionen.

W. Feller (Stockholm).

Analysis.

Heffter, Lothar: Kurven- und Stieltjes-Integral. Math. Z. **40**, 608—612 (1935).

Es ist zumeist üblich, das reelle Kurvenintegral als Spezialfall des allgemeineren Stieltjesintegrals einzuführen. Verf. weist darauf hin, daß auch umgekehrt aus der selbständigen (historisch älteren) Definition des Kurvenintegrals das Stieltjesintegral (mit stetiger Belegungsfunktion) als Spezialfall erscheint. Diese Beziehung finde sich im wesentlichen schon in einer älteren Arbeit des Verf. (Göttinger Nachrichten **1902**).

Rogosinski (Königsberg).

Aumann, Georg: Aufbau von Mittelwerten mehrerer Argumente. II. (Analytische Mittelwerte.) Math. Ann. **111**, 713—730 (1935).

Verf. studiert drei Algorithmen, die Erhöhung, die Erniedrigung und die Iteration, die aus jedem analytischen Mittel (vgl. dies. Zbl. **9**, 173) von n Variablen je ein weiteres analytisches Mittel von $n+1$ Variablen (Obermittel) bzw. von $n-1$ Variablen (Untermittel) bzw. von n Variablen (iteriertes Mittel) her-

zuleiten gestatten, wobei diese Mittel dasselbe Grundgebiet wie das Ausgangsmittel haben. Die Erhöhung wurde im Teil I der Arbeit für reelle Mittel eingeführt und untersucht. Ihre Definition überträgt sich unmittelbar auf analytische Mittel. Die Erniedrigung besteht in folgendem: Ist $M(z_1, \dots, z_n)$ ein analytisches Mittel, so läßt sich die Gleichung $w = M(z_1, \dots, z_{n-1}, w)$ mit Hilfe sukzessiver Approximationen eindeutig nach w auflösen. $w = M^{(-1)}(z_1, \dots, z_{n-1})$ ist wieder ein analytisches Mittel, das Untermittel von M . Bildet man vom Obermittel $M^{(1)}$ von M das Untermittel, so erhält man im allgemeinen nicht M selbst, sondern das „iterierte Mittel“

$$M_{(1)}(z_1, \dots, z_n) = M(M(m, z_2, \dots, z_n), \dots, M(z_1, \dots, z_{n-1}, m)),$$

wo $m = M(z_1, \dots, z_n)$ gesetzt ist. Ein Mittel ist dann und nur dann „vollkommen“ (d. h. gleich seinem iterierten), wenn es quasiarithmetisch (vgl. dies. Zbl. 9, 173) ist. Durch unbegrenzte Wiederholung des Iterationsprozesses entsteht aus einem analytischen Mittel M mit dem Grundgebiet G eine Folge analytischer Mittel, die gegen ein quasiarithmetisches Mittel mit demselben Grundgebiet konvergieren. Dieses quasiarithmetische Mittel erweist sich als identisch mit dem nach einem früheren Ergebnis des Verf. (vgl. dies. Zbl. 11, 359—360) durch M eindeutig bestimmten quasiarithmetischen Mittel Q_M , für das jedes in G enthaltene M -konvexe Kontinuum zugleich Q_M -konvex ist. (I. vgl. dies. Zbl. 8, 56.)

W. Fenchel (Kopenhagen).

Brown, Arthur B.: Functional dependence. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 379 bis 394 (1935).

Es sei $u_\nu = u_\nu(x_1, \dots, x_q)$ ($\nu = 1, \dots, p$) (1)

ein System von reellen Funktionen, die in einem Gebiet \mathfrak{G} des reellen x_1, \dots, x_q -Raumes stetige partielle Ableitungen s -ter Ordnung haben ($s \geq 1$; genauer wird über s weiter unten verfügt). Hat für ein $r < p$ die Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_q} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \end{pmatrix}$$

an jeder Stelle von \mathfrak{G} einen Rang $\leq r$, so sind die Funktionen (1) in \mathfrak{G} voneinander abhängig in dem zuerst von Knopp und R. Schmidt [Math. Z. 25, 373 (1926)] genau beschriebenen Sinne. Über die Zahl s setzt Verf. folgendes voraus: Es werden ganze Zahlen k_p^q durch

$$\frac{q}{p} \leq k_p^q < \frac{q}{p} + 1$$

bestimmt, und für $0 \leq r < p, q$ wird gesetzt

$$s = s(p, q, r) = \begin{cases} k_{p-r}^{q-r} + \sum_{n=1}^{r-1} k_{p-r}^{q-2p+n}, & \text{falls } q - 2p + r > 1, \\ k_{p-r}^{q-r}, & \text{falls } q - 2p + r \leq 1 \end{cases}$$

ist. Der Satz des Verf. geht für $q \leq p$ in den von Knopp und R. Schmidt a. a. O. und für $q = p + 1$ in den von Kamke [Math. Z. 39, 672 (1935); vgl. dies. Zbl. 11, 58] bewiesenen Satz über. — Das Wichtige an dem Satz ist, daß in ihn nur Voraussetzungen über die Differenzierbarkeit der Funktionen und den Höchstgrad im ganzen Gebiet eingehen. Der Satz wird auf Funktionen ausgedehnt, die von Parametern abhängen. Weiter wird der entscheidende Hilfssatz auf Systeme von komplexen analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen und daraus im Falle zweier analytischer Funktionen ein Satz über das Bestehen einer analytischen Relation zwischen diesen Funktionen gewonnen.

Kamke (Tübingen).

Kroukowski, B. V.: Zur Theorie der unendlichen Kettenbrüche 2. Klasse. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 195—205 u. deutsch. Zusammenfassung 205—206 (1935) [Ukrainisch].

Consider a ternary continued fraction, i. e. a sequence

$$\{P_m, Q_m, N_m\} \quad (m = -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

determined by means of the following recurrence-formulae:

$U_{m+1} = a_{m+1} U_m + b_{m+1} U_{m-1} + c_{m+1} U_{m-2}$ ($m = -1, 0, 1, \dots$; $U_m = P_m, Q_m, N_m$), (1) where the a 's, b 's, c 's are given constants or functions of the variables x_1, x_2, \dots , and the initial conditions are:

$P_{-3} = P_{-2} = 0, P_{-1} = 1$; $Q_{-3} = Q_{-1} = 0, Q_{-2} = 1$; $N_{-3} = 1$; $N_{-2} = N_{-1} = 0$.

This continued fraction is said to converge if the following limits exist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{N_n} = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n}{N_n} = q. \quad (2)$$

The author expresses P_n, Q_n, N_n in form of determinants ("continuants of the second class") and, making use of the theory of infinite determinants, discusses the convergence properties and the functional character of (2). The following results are obtained. Th. I. The ternary continued fraction (1), where the a 's, b 's and c 's are constants, converges, if: 1° both series

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{i+1}}{a_i a_{i+1}}, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_{i+2}}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} \quad (3)$$

converge absolutely; 2° $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 < \frac{1}{2}$, where

$$\sigma_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{b_{i+1}}{a_i a_{i+1}} \right|, \quad \sigma_2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{c_{i+2}}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} \right|. \quad (4)$$

Th. II. Let the a 's, b 's and c 's depend on n variables x_1, x_2, \dots, x_n . Assume: 1° the quantities

$$a_0, \quad b_0, \quad \frac{b_{i+1}}{a_i a_{i+1}}, \quad \frac{c_{i+2}}{a_i a_{i+1} a_{i+2}} \quad (i = 0, 1, \dots), \quad \frac{c_1}{a_1 b_0}$$

are holomorphic in a certain closed region A ; 2° the above series (3) both converge absolutely and uniformly in A ; 3° $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, as defined in Th. I, remains in A less than $\frac{1}{2}$. Then p and q are holomorphic in A . (A short bibliography is appended, but no reference is made to the work of Perron [cf. O. Perron, Ann. Scuola norm. super. Pisa (2) 4, 133—138 (1935); this Zbl. 11, 156—157].) J. Shohat (Philadelphia).

Bödewadt, Uwe Timm: Zum Momentenproblem für das Intervall $[0, 1]$. Math. Z. 40, 426—462 (1935).

Suppose $\{\mu_p\}$ is a sequence of constants which satisfy the necessary and sufficient conditions that the monotonic moment problem for the interval $(0, 1)$, i. e. there exists a monotonic function $\chi(x)$ such that for every p $\mu_p = \int_0^1 x^p d\chi(x)$, has a solution.

This paper is concerned with the distribution of the functions $\chi_p(x)$ whose first $p+1$ moments are $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p$. It develops that there exists a monotonic nondecreasing sequence of functions $u_p(x)$ and a monotonic nonincreasing sequence of functions $v_p(x)$ such that for every p $u_p(x) \leq \chi_p(x) \leq v_p(x)$, these functions obviously converging above and below to the solution of the moment problem. Assuming that for any jump, the step function $\chi_p(x)$ assumes all values between $\chi_p(x+0)$ and $\chi_p(x-0)$, i. e. χ_p is a broken line consisting of vertical and horizontal pieces, then for any p , there exist two stepfunctions having $p+2$ pieces, while there are an infinite number with $n+3$ pieces, the vertices lying alternately in the bounding functions u_p and v_p . The author develops formulas for determining the location of the jumps, and their magnitudes. The Stieltjes approximating stepfunction is one of the stepfunctions of $p+2$ pieces. Hildebrandt (Ann Arbor).

John, F.: Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion. Math. Ann. 111, 541—559 (1935).

Let G be a closed domain in R_n and $\{\Sigma_{a_1 \dots a_r, b}\} \equiv \{\Sigma\}$ a family of surfaces determined by (*) $\varphi(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_r) = b$ where φ satisfies certain condition of continuity in x and is analytic in $A = (a_1, \dots, a_r)$ for all A belonging to a set Γ . It is

assumed that for a fixed A through each point $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ of G there passes one and only one surface (*) with $|b| \leq B$. — Let $Q(X, A)$ be a given function continuous in X and analytic in A , and do the surface element of Σ . The author considers functions of the type $g(A, b) = \int_{\Sigma} f(X) Q(X, A) do$ where $f(X)$ is continuous in G and zero

outside of G and discusses the question of unique determination of $g(A, b)$ for all $A \in \Gamma$ and $|b| \leq B$ if it is known for all A of a certain subset $M \subset \Gamma$. It is proved that $g(A, b)$ is uniquely determined provided M has a limit point in G at which it is "general" in a certain precisely described sense. The method consists in using the Fourier transform of $g(A, b)$ (in b) which is analytic in A . The result above is applied to some boundary value problems for the partial equation $u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n} - \frac{n-1}{t} u_t - u_{tt} = 0$. Finally it is shown that a continuous $f(X)$ is not uniquely determined by the values of its integrals over spheres of radius 1 while it is determined, in the domain $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq A^2$, $A > 1$, by its integrals over unit spheres in $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq (A-1)^2$ and its own values in $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

Hille, Einar, and J. D. Tamarkin: On the absolute integrability of Fourier transforms. *Fundam. Math.* **25**, 329—352 (1935).

Let \mathfrak{S}_p ($p \geq 1$) denote the class of functions $f(z)$ analytic in the halfplane $\Im z > 0$ ($z = x + iy$) and such that the integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx$ is bounded for $y > 0$.

The purpose of the paper is to investigate certain properties of functions belonging to \mathfrak{S}_p . It turns out that the class \mathfrak{S}_p has good many properties analogous to those of the class H_p of functions $\varphi(z)$ analytic inside the unit circle and such that $\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta = O(1)$. It must however be noted that of the two classes \mathfrak{S}_p and H_p

the study of the former is more difficult and requires new ideas. We quote the following results. (a) For every $f(z) \in \mathfrak{S}_p$ there is a function $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, such that at almost every point x , $f(z)$ tends to $f(x)$ as z tends to x along nontangential

paths. Moreover, (b) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy) - f(x)|^p dx \rightarrow 0$ for $y \rightarrow 0$, and (c) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^p dx \uparrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx$

as $y \downarrow 0$. (d) Every function $f(z)$ belonging to \mathfrak{S}_p is represented by its Cauchy and Poisson integrals taken along the line $\Im z = 0$. (e) If $f(z) \in \mathfrak{S}_p$, then $f(z) = b(z) h(z)$, where $h(z) \neq 0$, $h(z) \in \mathfrak{S}_p$, and $b(z)$ is an analogue of the Blaschke product formed with the zeros of $f(z)$. The main result of the paper is as follows (f): Let $g(x)$ and its con-

jugate function $\tilde{g}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{x-t} dt$ be both integrable L over $(-\infty, \infty)$ and

let $\hat{f}(x)$ be the Fourier transform of $f(x) = g(x) + i\tilde{g}(x)$. Then $\int_0^{\infty} |\hat{f}(t)|/t dt \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$.

The corresponding result for the class H_1 is due to Hardy and Littlewood [*Math. Ann.* **97**, 159—207 (1927)].

A. Zygmund (Wilno).

Differentialgleichungen:

Peñalver, Patricio: Einige Eigenschaften der Differentialgleichungen von Bernoulli und Riccati. *An. Asoc. españ. Progr. Ci.* **2**, 280—290 (1935) [Spanisch].

Legt man aus den Punkten einer zur Y -Achse parallelen Geraden Tangenten an die einzelnen Integralkurven der Differentialgleichungen $y' = Py + Ry^n$, $y' = Py + Q + Ry^2$ und sucht die Einhüllenden dieser Tangentenschar, so kann man durch die geometrischen Eigenschaften dieser Einhüllenden ausgezeichnete Stellen der Differentialgleichungen charakterisieren.

F. Knoll (Wien).

Mitrinovitsh, Dragoslav S.: Untersuchungen über eine wichtige Differentialgleichung erster Ordnung. Belgrad: Diss. 1935. 39 S. [Serbisch].

Nach der in dies. Zbl. 8, 352 beschriebenen Methode werden über 20 spezielle Formen für die Koeffizienten $a_k = a_k(x)$ angegeben, für welche die Gleichung $y'^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y' + a_0 = 0$ auf Quadraturen oder auf eine Riccatische Gleichung zurückführbar ist. W. Feller (Stockholm).

Hopf, Ludwig: Fortsetzungsrelationen bei den Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. 111, 678—712 (1935).

Die theoretischen und praktischen Schwierigkeiten bei der Methode, lineare Differentialgleichungen durch Reihenansatz zu lösen — konvergente R. von einem nicht oder unwesentlich singulären Punkt, semikonvergente (asymptotische) R. von einem wesentlich singulären Punkt aus, der ins Unendliche verlegt sei —, liegen in der Frage der Zusammengehörigkeit dieser Reihen. Bei asymptotischen Entwicklungen, die nicht für alle Argumente dieselbe Lösung darstellen, besteht das Grundproblem zunächst darin, die bestimmte partikuläre Lösung der Differentialgleichung, die etwa für positiv reelle Variable durch eine asymptotische Reihe angenähert wird, zu anderen Argumenten fortzusetzen und für die ganze komplexe Ebene festzulegen. Das zweite Problem ist, die Verknüpfung der asymptotischen partikulären Lösungen mit den konvergenten Reihen im Endlichen herzustellen. Verf. gibt einen in sehr vielen Fällen gangbaren Weg an, beide Probleme zu lösen: „Die asymptotische Lösung, welche zu einem irgendwie eindeutig definierten Integral der Differentialgleichung gehört, wird mit unbestimmten Konstanten für jedes Azimut hingeschrieben, nachdem durch Einführung einer geeigneten unabhängigen Variablen Eindeutigkeit der Lösung klar gestellt ist. Dann werden Cauchysche Rundintegrale über diese asymptotischen Lösungen, multipliziert mit verschiedenen Potenzen der unabhängigen Variablen, gebildet und identifiziert mit den entsprechenden Koeffizienten der vom Nullpunkt aus entwickelten konvergenten Potenzreihen, und zwar mit den negativen und den positiven Potenzen. Daraus, daß eine Anzahl solcher Potenzen verschwinden muß, ergeben sich gerade genügend Bedingungen, um die in der asymptotischen Entwicklung auftretenden Koeffizienten — die Umlaufkonstanten — zu bestimmen. Alle anderen Koeffizienten nehmen dann von selbst — wie immer wieder durch Proben gezeigt werden wird — die richtigen Werte an.“ Diese neue Methode, die der Verf. an der Differentialgleichung

$$y''(x) + x^n y(x) = 0 \quad (\text{spez. } n = 3)$$

vollständig entwickelt, läßt sich zunächst auf beliebige „zweistufige Differentialgleichungen“ übertragen, wenn alle in x homogenen Summanden (z. B. $y'' + \frac{a}{x} y' + \frac{c}{x^2} y$) als eine „Stufe“ der Diffgl. zusammengefaßt werden. Verf. behandelt als Beispiel die Diffgl. der Zylinderfunktionen der Ordnung $\frac{1}{2}$

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right) y(x) = 0,$$

bei dem sich ausgezeichnete Übereinstimmung mit den aus den Integraldarstellungen der partikulären Lösungen gewonnenen Fortsetzungsrelationen ergibt. Weiterhin zeigt der Verf. die Schwierigkeiten auf, die entstehen, wenn die eine asymptotische Lösung keine Exponentialfunktion enthält, und überwindet sie in dem betrachteten Beispiel. Schließlich dehnt er seine neue Methode auf gewisse mehrstufige Differentialgleichungen aus. v. Koppensfels (Hannover).

Koukléss, J.: Sur les solutions particulières des équations linéaires. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 73—79 u. franz. Zusammenfassung 79 (1934) [Russisch].

Pour une équation différentielle de la forme

$$f(D) y \equiv y + \alpha_1 y' + \dots + \alpha_n y^{(n)} + \dots = f(x)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ étant des constantes (en nombre fini ou infini), $f(x)$ une fonction analytique, l'auteur trouve par une voie très longue (développement du second membre

en série de Fourier, restriction préliminaire aux dérivées d'ordre paire) une solution en forme d'une série de dérivées successives de $f(x)$; or on obtient cette solution immédiatement en développant formellement l'opérateur $1/f(D)$ en série de puissances croissantes de D [voir p. ex. Pincherle, Le operazioni distributive, p. 46 (1901)], avec les mêmes conditions que celles de l'auteur, imposées à $f(x)$ pour la validité du développement.

W. Stepanoff (Moskau).

Scorza Dragoni, G.: A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti per una equazioni differenziale del secondo ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 44—48 (1935).

Beweis der beiden Sätze: 1. Wenn $f(x, y, y')$ in $a \leq x \leq b$, $-\infty < y, y' < +\infty$ stetig und hinsichtlich y monoton wachsend ist, dann hat $y'' = f(x, y, y')$ in $x_0 \leq x \leq x_1$ mit $a \leq x_0 < x_1 \leq b$ höchstens eine Lösung für die $y(x_0) = y$, $y(x_1) = y_1$ vorgegeben ist. 2. Wenn $f(x, y, y')$ im Bereich $a \leq x \leq b$, $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, $-\infty < y' < +\infty$ stetig und beschränkt ist, wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ in $a \leq x \leq b$ Integrale von $y'' = f(x, y, y')$ sind, dann gibt es ein Integral $y_0(x)$ mit $y_0(x_0) = y_0$, $y_0(x_1) = y_1$, wobei $a \leq x_0 < x_1 \leq b$, $y_0(x_0) \leq y_0 \leq y_1(x_0)$, $y_0(x_1) \leq y_1 \leq y_1(x_1)$ gelten muß. Rellich (Marburg, Lahn).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine. Boll. Un. Mat. Ital. 14, 225—230 (1935).

Sätze aus der früheren Arbeit [Math. Ann. 105 (1931); dies. Zbl. 2, 132] werden verallgemeinert auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rellich.

Tschen, Yü-Why: Über das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungsproblemen, welche im Limes ausarten. Compositio Math. 2, 378—401 (1935).

Studiert wird das Verhalten der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung höherer Ordnung bei einem Grenzübergang, der die Ordnung der Differentialgleichung erniedrigt. Im ersten Teil der Arbeit werden Anfangswertprobleme betrachtet, im zweiten Teil Randwertprobleme. I. Für die Folge von Differentialgleichungen $\alpha_i(x) u^{(n)} + \beta_1(x) u^{(n-1)} + \dots + \beta_n(x) u = f_i$, $i = 1, 2, \dots$ gelte in $0 \leq x \leq l$: 1. $\alpha_i(x)$ stetig, $\beta_1 \dots \beta_n, f_i$ stetig differenzierbar; 2. $\alpha_i(x) > 0$, $\beta_1(x) > 0$; 3. $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i(x) = 0$;

4. $|f_i(x)|$ gleichmäßig beschränkt. Dann folgt aus der Beschränktheit von $|u_i(0)|$, $|u_i'(0)|, \dots, |u_i^{(n-1)}(0)|$ die Beschränktheit von $|u_i(x)|, |u_i'(x)|, \dots, |u_i^{(n-1)}(x)|$ in $0 \leq x \leq l$. Fügt man die weiteren Voraussetzungen hinzu: 5. $\max_{0 \leq x \leq l} \alpha_i(x) \leq M \cdot \min_{0 \leq x \leq l} \alpha_i(x)$

und 6. $|f_i(x)|$ gleichmäßig beschränkt in $0 \leq x \leq l$, dann folgt sogar die Beschränktheit von $|u_i^n(x)|$ in $\varepsilon \leq x \leq l$ für jedes $\varepsilon > 0$. Aus diesem Satz folgt nach Spezialisierung $f_i = f$: Die Lösungsfolge $u_i(x)$ von $\alpha_i(x) u^{(n)} + \beta_1 u^{(n-1)} + \dots + \beta_n u = f$ mit den von i unabhängigen Anfangswerten $u_i(0) = A_0, \dots, u_i^{(n-1)}(0) = A_{n-1}$ konvergiert gegen die durch $U(0) = A_0, \dots, U^{(n-2)}(0) = A_{n-2}$ festgelegte Lösung von $\beta_1(x) U^{(n-1)} + \dots + \beta_n U = f$. (Vgl. hierzu Tschen, dies. Zbl. 7, 306.) — II. Statt der Anfangswerte im Punkte $x = 0$ werden im zweiten Teil die Randwerte in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ festgehalten. Die Resultate von I ergeben jetzt Aussagen über das Verhalten von Fundamentallösungen. Speziell für $n = 2$ (und analog für $n = 4$) ergibt sich: Die Lösung von $\alpha_i u'' + \beta_1 u' + \beta_2 u = f$ mit $u_i(0) = R_0$, $u_i(l) = R_l$ konvergiert gegen die Lösung U von $\beta_1 U' + \beta_2 U = f$. Je nachdem ob β_1 positiv oder negativ ist, gilt für $U(x)$ entweder $U(l) = R_l$ oder $U(0) = R_0$. Rellich.

Gellerstedt, S.: Sur un problème aux limites pour l'équation $y^{2s} z_{xx} + z_{yy} = 0$. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 10, 1—12 (1935).

Die Gleichung des Titels wird zunächst in einem Normalgebiet

$$x^2 + y^{2(s+1)}/(s+1)^2 \leq a^2$$

untersucht; Existenz und Eindeutigkeit der Lösung in der Hälfte des Gebietes oberhalb oder unterhalb der x -Achse, wenn man auf dem Rand die Werte von $z(x, y)$ und auf der x -Achse die Werte von z selbst oder die von z_y vorschreibt, folgen aus der Existenz einer Greenschen Funktion, die sich durch die hypergeometrische Funktion explizit ausdrücken läßt. Daraus gewinnt Verf. die Lösung des Dirichletschen Problems

für das ganze Normalgebiet, wobei $z(x, y)$ auf der x -Achse nicht aufhört, analytisch zu sein. In dem Falle eines allgemeineren eine Strecke der x -Achse enthaltenden Gebietes bildet Verf. dem Potential einer Doppelbelegung analoge Integrale, durch welche das Dirichletsche Problem auf die Lösung einer uneigentlich singulären Integralgleichung zurückgeführt wird.

G. Cimmino (Napoli).

Nicolesco, Miron: Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordre p , au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 37, 83—87 (1935).

In einem Sternbereiche um den Nullpunkt genüge $u(r, \varphi)$ der Gleichung $\Delta^n u = 0$ ($\Delta^n = n$ mal iterierter Laplacescher Operator in Polarkoordinaten). Nach E. Almansi [Ann. di Mat., III. s. 2 (1899)] ist dann u in der Form $u = u_0 + r^2 u_1 + \dots + r^{2n-2} u_{n-1}$ darstellbar, worin die u_k harmonische Funktionen sind. Hier wird gezeigt, daß diese Darstellung eindeutig ist.

W. Feller (Stockholm).

Tonolo, A.: Sull'integrazione del sistema differenziale di Dirac. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 30—33 (1935).

Für das System der Diracschen Differentialgleichungen wird die Lösung explizit angegeben in den beiden Fällen: 1. Die gesuchten Funktionen sind für $t = 0$ vorgeschrieben. 2. Die Lösung ist im Innern eines Raumstückes S mit der Begrenzung σ gesucht, wenn für $t = 0$ in S und für alle Zeiten auf σ die Lösung vorgeschriebene Werte annehmen soll.

Rellich (Marburg, Lahn).

Reissner, Erich: Über die Biegung der Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast. Math. Ann. 111, 777—780 (1935).

Verf. löst die Aufgabe, die Biegung einer dünnen elastischen am Rande gestützten und in einem inneren Punkte durch eine Einzelkraft beanspruchten Kreisplatte zu bestimmen, in geschlossener Form, während — abgesehen von einem Spezialfall — die bisher bekannten Lösungen (Föppl, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1912, 155) auf Reihenentwicklungen beruhen. Zur Lösung der Aufgabe, die bekanntlich auf ein Randwertproblem der Gleichung $\Delta \Delta u = 0$ führt, macht Verf. einen eine zunächst willkürliche Funktion f enthaltenden Ansatz, durch den die Differentialgleichung und die eine der beiden Randbedingungen von selbst erfüllt sind, während die andere Randbedingung eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für f liefert.

E. Rothe (Breslau).

Rashevsky, N.: Some physico-mathematical aspects of nerve conduction. II. Physics 6, 308—314 (1935).

In Erweiterung einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 7, 382) geht Verf. nun von neuen Differentialgleichungen für die Fortpflanzung eines Nervenreizes aus. Als abhängige Veränderliche sind gewählt die Konzentrationen der verschiedenen Iontypen, als unabhängige Veränderliche die Zeit. Verf. geht aus von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung für die betreffenden Konzentrationen als Funktion der Zeit, welche den bekannten Telegraphengleichungen sehr ähnlich lauten. Aus einer Lösung dieser Gleichungen berechnet er die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Nervenreizes und findet, daß dieselbe nicht konstant ist, sondern asymptotisch erst konstant wird, während die Anfangsgeschwindigkeit sich wenig von dem asymptotischen Endwert unterscheidet, was mit Experimentalergebnissen in guter Übereinstimmung ist.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Variationsrechnung:

Moshar, W., und P. Wassilenko: Über ein Variationsproblem. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 69—73 u. deutsch. Zusammenfassung 73 (1934) [Ukrainisch].

Among curves with given coefficient of friction joining two points A and B , the curve $y = y(x)$ of quickest descent is sought. This leads to a variation problem $\int |y''(y' - k)|^{\frac{1}{2}} dx = \min$. Assuming that there are no points of inflection, the function

$z = y'(x)$ has a unique inverse and can be used as an independent variable; the problem then simplifies to the form $\int (\pm z'/z - k)^{1/2} dx = \min.$, and for this the extremals are found.

E. J. McShane (Virginia).

Moshar, W., et P. Wassenko: Le problème de la brachistochrone en présence de friction et de résistance du milieu. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 2, 125—128 (1935) [Ukrainisch].

The problem is that of determining the curve of shortest descent from A to B under the influence of gravity, friction of the curve and friction of the surrounding medium. The form of the resulting variation problem is simplified by introducing the angle $\alpha = \arctan dy/dx$ as independent variable. It then becomes an isoperimetric problem, with the equation of motion as side equation. However, the authors seem to have neglected the fact that x and y are not independent functions of α , but are connected by the relation $dy/d\alpha - dx/d\alpha \tan \alpha = 0$, which should be considered as a second side equation.

E. J. McShane (Virginia).

Grossberg, J.: Quelques remarques à propos d'un problème de variations. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 2, 129—133 (1935) [Ukrainisch].

A body traverses a (plane) curve from A to B , under the influence of gravity, friction of the curve and friction of the medium (proportional to square of velocity). The curve is sought for which final velocity is maximum. Under certain simplifying assumptions (e.g. that the centrifugal force is negligible) the extremals of the problem are shown to satisfy a certain integro-differential equation. From this equation a parametric representation of the extremal is found.

E. J. McShane (Virginia).

Pâquet, Victor: Sur la formule fondamentale du calcul des variations. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 21, 510—517 (1935).

This note concerns itself with the calculus of variations problem for $\mathfrak{F}(x^i; y^\alpha; y^\alpha_i)$ integrated over a domain D_n in the space E_n with coordinates $x^i; y^1, \dots, y^p$ being given functions of the coordinates and $y^\alpha_i \equiv \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}$. To express the variation of the integral of \mathfrak{F} , let E_N where $N = n + p$ have coordinates $x^1 \dots x^n, x^{n+1} \dots x^{n+p}$ and let Σ_n be defined by $\Phi^\alpha(x^1, \dots, x^{n+p}) = 0$ where $\Delta \equiv \frac{\partial(\Phi^1 \dots \Phi^p)}{\partial(x^{n+1} \dots x^{n+p})}$ is not zero. $\Phi^\alpha = 0$ may then be solved for $x^{n+\alpha}$ and the functions are so chosen that $x^{n+\alpha} = y^\alpha(x^1, \dots, x^n)$ given initially. From this

$$y^\alpha_i = -\frac{\Delta(\alpha/i)}{\Delta} \quad \text{where} \quad \Delta(\alpha/i) \equiv \frac{\partial(\Phi^1 \dots \Phi^p)}{\partial(x^{n+1} \dots x^{n+\alpha-1}, x^i, x^{n+\alpha+1} \dots x^{n+p})}$$

so that

$$\int_{D_n} \mathfrak{F} dx^1 \dots dx^n = \int_{(\Sigma_n)} \mathfrak{F}^* d(x^1 \dots x^n) \quad \text{where} \quad \mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}\left(x^1 \dots x^{n+p}; -\frac{\Delta(\alpha/i)}{\Delta}\right).$$

It then follows that

$$\int_{D_n} \mathfrak{F} dx^1 \dots dx^n = \int_{(\Sigma_n)} \frac{L}{M} d\Sigma_n$$

where M is De Donder's invariant given by $d\Sigma_n = \frac{M(-1)^{n+1} \dots (-1)^{n+p} d(x^1 \dots x^n)}{\Delta}$

and $L = (-1)^{n+1} \dots (-1)^{n+p} \Delta \mathfrak{F}^*$. The variation is given by

$$\delta \int_{D_n} \mathfrak{F} dx^1 \dots dx^n = \int_{D_n} (D\mathfrak{F}) dx^1 \dots dx^n + \oint_{D_{n-1}} \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} (X^i \mathfrak{F} + D^i \mathfrak{F}) d(x^1 \dots x^{i-1} x^{i+1} \dots x^n)$$

where

$$D\mathfrak{F} = \sum_{\alpha} \left[\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha} - \sum_i \frac{d}{dx^i} \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_i} \right) \right] \left(Y^\alpha - \sum_j y^\alpha_j X^j \right),$$

$$D^i \mathfrak{F} \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y^\alpha_i} \left(Y^\alpha - \sum_j y^\alpha_j X^j \right).$$

X^i , Y^α and Y^α_i defining the variational displacement. It is then proved that the last integral above is equivalent to

$$\oint_{(\Sigma_{n-1})} E \left[\sum_{\alpha} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \Delta(\alpha/i)} (-1)^{\alpha-1+i+\varepsilon} d(x^1 \dots x^{i-1} x^{i+1} \dots x^n) + \frac{\partial L}{\partial \Delta} d(x^1 \dots x^n) \right]$$

where $\varepsilon = n + 1 + n + \alpha - 1 + n + \alpha + 1 + n + p$. *M. S. Knebelman.*

Reid, William T.: The theory of the second variation for the non-parametric problem of Bolza. *Amer. J. Math.* 57, 573—586 (1935).

The principal result of the paper is the theorem: If an extremal arc E_{12} : $y_i = y_i(x)$, with multipliers $\lambda_0 = \text{const}$, $\lambda_\alpha(x)$ satisfies the strengthened Clebsch condition, and contains no point conjugate to its first end point, then there exists a family of mutually conjugate accessory extremals whose determinant does not vanish along E_{12} . Two methods for constructing such a family are given. The relation of the theorem to the theory of boundary value problems and to the proof of sufficiency theorems for the problems of Bolza and Mayer is discussed at the end of the paper. The author remarks that an independent and different proof of the theorem above has been published by Morse [*Trans. Amer. Math. Soc.* 37, 147—160 (1935); see this Zbl. 11, 28].

Graves (Princeton, N. J.).

Menger, Karl: *Metrische Geometrie und Variationsrechnung.* *Fundam. Math.* 25, 441—458 (1935).

Ein Raum heiße fastmetrisch, wenn für je zwei seiner Punkte, p, q , eine nicht negative Zahl pq definiert ist mit folgenden Eigenschaften: 1. $pp = 0$ für jedes p . 2. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so daß aus $pq < \delta(\varepsilon)$ stets folgt $qp < \varepsilon$. 3. Es existiert eine für nicht negative x definierte, in 0 stetige Funktion $\Delta(x)$ mit $\Delta(x) \geq 0$, $\Delta(0) = 0$ derart, daß für je drei Punkte p, q, r gilt:

$$pr \leq pq + qr + \text{Min}(pq, qr) \cdot \Delta[\text{Max}(pq, qr)].$$

Die Bogenlänge kann definiert werden, da gezeigt wird: existiert für eine sich verfeinernde Folge von einem Bogen eingeschriebenen Polygonen der Grenzwert der Längen, so auch für jede andere solche Folge. Die so definierte Bogenlänge ist bei normaler Übertragung der üblichen Begriffsbildung halbstetig nach unten. Ist ein fast metrischer Raum kompakt, so existiert zu zwei Punkten p, q , falls überhaupt ein sie verbindender Bogen endlicher Länge existiert, auch ein kürzester solcher Bogen. Dies kann folgendermaßen auf Variationsprobleme angewandt werden: $F(x, y, x', y')$ sei 1. reell, stetig und positiv für alle Quadrupel x, y, x', y' , für die x, y der abgeschlossenen Hülle \bar{G} eines beschränkten Gebietes G der Ebene angehört und x', y' alle von 0, 0 verschiedenen Zahlenpaare durchläuft. 2. F sei homogen vom 1. Grad in x', y' . 3. Es existiere eine Konstante $\Delta > 0$, so daß für jedes ϑ und jedes Punktepaar (x_1, y_1) , (x_2, y_2) aus \bar{G} stets $|F(x_1, y_1, \cos \vartheta, \sin \vartheta) - F(x_2, y_2, \cos \vartheta, \sin \vartheta)| < \Delta \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ wird. 3. F besitze stetige zweite Ableitungen nach x' und y' . Für einen Bogen

$B(x(t), y(t))$ aus \bar{G} werde gesetzt $J(B) = \int_{t_1}^{t_2} F[x(t), y(t), x'(t), y'(t)] dt$, sobald das Integral existiert.

Dann kann \bar{G} so zu einem fast metrischen, kompakten Raum ummetrisiert werden, daß für alle Bögen $B \subset \bar{G}$, für die $J(B)$ definiert ist, $e(B) = J(B)$ wird. Man bekommt so auf Grund der Existenz kürzester Bögen in der neuen Metrik einen Existenzsatz, der aber insofern nichts mit den üblichen Existenzstzen der Variationsrechnung zu tun hat, als nicht gezeigt wird, daß bzw. wann für die kürzesten Bögen oder einen unter ihnen das Integral $J(B)$ existiert. *H. Busemann (Kopenhagen).*

Menger, Karl: Sur un théorème général du calcul des variations. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 705—707 (1935).

L'Auteur énonce des conditions suffisantes pour la semicontinuit et pour l'existence de l'extrême absolu des intégrales mises sous la forme paramétrique

$\int F(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n) ds$, en admettant que la fonction $F(x, x')$ puisse même être discontinue par rapport à (x) , et en définissant la régularité sans faire intervenir les dérivées partielles par rapport à x'_1, \dots, x'_n . — Seulement il n'est pas exact d'affirmer que les théorèmes d'existence données jusqu'aujourd'hui demandent l'existence des dérivées par rapport à x'_1, \dots, x'_n [voir par ex. L. Tonelli, ce Zbl. 10, 119]; et, pour ce qui concerne l'extension des démonstrations au cas $n > 2$, on peut observer qu'une telle extension présente quelques difficultés pour les intégrales mises sous la forme ordinaire [voir par ex. E. J. McShane, ce Zbl. 9, 23 et 10, 68] tandis qu'elle est immédiate pour les intégrales mises sous la forme paramétrique. *Manià* (Pisa).

Funktionentheorie:

Hu, Kuen-sen: On Cauchy's integral theorem. Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A 3, 179—183 (1935).

L'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème sur l'intégrale de Cauchy le long d'une courbe de Jordan rectifiable, simple et fermée lorsque la fonction à intégrer est analytique à l'intérieur de la courbe et continue dans la région fermée constituée par la courbe et son intérieur. — Le mérite de cette démonstration est de présenter un caractère très élémentaire. — Elle repose sur le lemme suivant, dont l'auteur donne une démonstration remarquablement simple: Pour tout nombre positif δ , on peut à l'aide de segments prélevés sur les droites $y = m\delta$, $x = m\delta$ (m entier quelconque), diviser l'intérieur d'une courbe de Jordan rectifiable en un nombre fini de régions, chacune de ces régions, ayant, parallèlement aux axes de coordonnées des dimensions inférieures à 2δ .

E. Blanc (Paris).

Gelfond, A.: Über Potenzreihen mit ganzen Koeffizienten. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 29—32 u. deutsch. Zusammenfassung 33 (1934) [Russisch].

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D , contenant les points $0, 1, 2, \dots, p$. Supposons que

$$f(z) = \sum_n a_{0,n} z^n = \sum_n a_{1,n} (z-1)^n \dots = \sum_n a_{p,n} (z-p)^n,$$

où tous les $a_{p,n}$ sont entiers; supposons que la fonction $t = z(z-1)\dots(z-p)$ transforme D en un domaine simplement connexe D' dont le rayon de conformité ρ est supérieur à $p!, où q parcourt les nombres premiers inf. à p . Dans ces conditions $f(z)$ est une fonction rationnelle. L'A. développe la démonstration dans le cas où $p = 1$ ($\rho > 1$). *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).$

Gelfond, A.: Sur les fonctions, qui s'annulent avec leurs dérivées en un point de la frontière. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 25—27 u. franz. Zusammenfassung 27 (1934) [Russisch].

L'A. démontre le théorème suivant: Si $f(z) = \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$ ($\lambda_{n+1} > \lambda_n > 0$);

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\log^2 n} = \beta, \beta > 0; \quad \overline{\lim} \frac{\log |a_n|}{\sqrt{\lambda_n}} = -\alpha, \alpha > \frac{1}{\sqrt{\beta}}; \quad f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0;$$

alors $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Bernstein, V.: Alcune osservazioni sopra un teorema di Fabry. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 780—785 (1935).

L'A. démontre que si $f(z) = \sum a_n z^n$ ne possède sur son cercle de convergence qu'un nombre fini de points singuliers, tous algébrique-logarithmiques, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha$ (n passant par tous les entiers positifs, sauf au plus par une suite d'entre eux dont la mesure est nulle), le point d'abscisse α est la singularité la plus accentuée sur le cercle de convergence. Ce théorème est la réciproque d'un théorème de M. Jungen (v. ce Zbl. 3, 119) (α est le point dont le poids est le plus grand). *Mandelbrojt*.

Bernstein, Vladimir: À propos des méthodes de recherche des points singuliers des fonctions définies par des séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 581—584 (1935).

L'A. indique comment une méthode de M. M. Riesz [Acta math. **35**, 253 (1911)] permet de résoudre facilement un problème posé par M. Braitzeff: trouver la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les singularités de $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$ (absc. de conv. = 0) soient de la forme $-T + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Cette même méthode permet également de résoudre un problème plus général, à savoir celui qu'on obtient en remplaçant dans le problème cité les entiers k par des quantités γ_k telles que $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) = p > 0$. Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Braitzeff, Jean: Sur la généralisation de mes résultats précédents relatifs aux séries de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 634—636 (1935).

Dans une série de Notes récentes (v. ce Zbl. **10**, 163; **11**, 255; **12**, 78) l'auteur a exposé un certain nombre de résultats sur les points singuliers des fonctions définies par des séries de Dirichlet (1) $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ ($\lambda_n \uparrow \infty$ pour $n \uparrow \infty$); dans la plupart des démonstrations l'auteur admettait (tout au moins tacitement) que les exposants de la série (1) soient tels, que (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0$. Toutefois, dans l'une de ces Notes (v. ce Zbl. **11**, 255), l'auteur a donné une démonstration d'une de ses formules, dans laquelle il ne recourt en aucune manière à la condition (2), ni à aucune condition limitant la croissance des λ_n (pourvu que $\lambda_n \uparrow \infty$ pour $n \uparrow \infty$). Le but de la présente Note est de montrer que la méthode utilisée dans la Note citée tout à l'heure peut être appliquée à la démonstration de tous les résultats de l'auteur, publiés dans les autres Notes; ceux-ci résultent ainsi valables pour toutes les séries (1) indépendamment de la condition (2). Vlad. Bernstein (Milano).

Regensburger, Martin: Asymptotische Darstellung und Lage der Nullstellen spezieller ganzer Funktionen (Exponentialsummen). Math. Ann. **111**, 505—540 (1935).

The author is concerned with the asymptotic behavior and the distribution of the zeros of entire functions of the type $F(z) = \sum_1^\infty c_\nu e^{a_\nu z}$ or $\Phi(z) = \sum_1^\infty c_\nu P_\nu(z) e^{a_\nu z}$. Here $|a_\nu| \leq a$, $\sum_1^\infty |c_\nu| < \infty$, the $P_\nu(z)$ are polynomials of bounded degree satisfying the condition $|P_\nu(z)| \leq (m+1) A |z|^m$, m and A fixed. The investigation follows essentially the same lines as those used by G. Pólya and E. Schwengeler (see the latter's Zurich thesis, 1925) for finite exponential sums. The points \bar{a}_ν are called exponent points, the least convex cover of the set (\bar{a}_ν) the indicator diagram of $F(z)$. If \bar{a}_ν is a vertex of the diagram, the term $c_\nu e^{a_\nu z}$ dominates in the expansion in an angle determined by the perpendiculars from the origin to the semi-tangents of the diagram at the vertex. If the vertex is not an exponent point, it is the limit point of such points; in this case a sum $\sum c_\nu e^{a_\nu z}$, extended over the exponent points \bar{A}_ν located in a small neighborhood of the vertex, will dominate. Finally, if a_j is an exponent point on a curved arc of the boundary, the term $c_j e^{a_j z}$ dominates in the direction $\arg z = \arg \bar{a}_j$. The zeros of $F(z)$ are mainly located in the directions perpendicular to the semi-tangents at the vertices of the diagram. What happens when there are no vertices is not touched upon by the author. He determines the number of zeros in a direction perpendicular to a rectilinear side of length δ of the diagram, and finds $\frac{\delta}{2\pi} r + O(\log r)$ within a circle of radius r . — Similar results for $\Phi(z)$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Aronszajn, N.: Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications. Acta math. **65**, 1—156 (1935).

In dieser wichtigen Arbeit beschäftigt sich Verf. mit der Zerlegung einer eindeutigen und regulären Funktion in eine Summe von neuen analytischen Funktionen, die „einfachere“ Singularitätsmengen als die gegebene Funktion haben. In anderen Worten handelt es sich

um eine möglichst weitgehende Verallgemeinerung des Mittag-Lefflerschen Satzes über meromorphe Funktionen und um einige Anwendungen einer solchen Verallgemeinerung in der Funktionentheorie. — Von einigen Ausnahmen abgesehen, beschäftigt sich Verf. mit Funktionen, die in der ganzen Ebene, abgesehen von einer abgeschlossenen nirgends-dichten Singularitätsmenge F (S.-M.), eindeutig und regulär (eind. u. reg.) sind. Diese Ausdrücke werden aber vom Verf. nicht im Weierstraßschen, sondern im Cauchyschen Sinne verstanden. So z. B. für eine Funktion $f(x)$, die für $|x| < 1$ gleich x und für $|x| > 1$ gleich 0 ist, betrachtet Verf. den Kreisumfang $|x| = 1$ als S.-M., und die Funktion wird als eind. u. reg. in der ganzen Ebene, abgesehen von diesem Kreisumfang, betrachtet. Im Weierstraßschen Sinne handelt es sich demgemäß um die Gesamtheit einiger Funktionen (oder Funktionszweige) $f_n(x)$, von denen jede in einem zusammenhängenden Maximalteile der Komplementärmenge von F regulär ist; die Grenzen dieser Teile bestehen aus Punkten von F , die entweder singulär für die entsprechende $f_n(x)$ sind oder Teile der Komplementärmenge voneinander trennen, denen verschiedene analytische Funktionen $f_n(x)$ entsprechen. — Dieses festgestellt, lautet der Hauptsatz der Abhandlung: Wenn F die S.-M. der eind. u. reg. Funktion $f(x)$ ist, so kann man jeder Zerlegung von F

$$F = F_1 + F_2 \quad (1)$$

in eine Summe von zwei abgeschlossenen Mengen F_1 und F_2 eine Zerlegung

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad (2)$$

zuordnen, so daß die S.-M. der eind. u. reg. Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gleich F_1 und F_2 sind. — Wenn F_1 und F_2 keine gemeinsame Punkte haben, ist der Beweis einfach (vgl. auch Fréchet, Acta math. 54). Man zeigt, daß in diesem Fall das Integral

$$\int_S \frac{f(z) dz}{z - x} \quad (3)$$

(wo der Integrationsweg S aus einer Gesamtheit geschlossener Kurven besteht, die die ganze Menge F_1 im Innern enthält, die Menge F_2 aber ganz im Äußern läßt) eine eind. u. reg. Funktion definiert, die in der Zerlegung (2) als $f_1(x)$ genommen sein kann. Im allgemeinen Fall, wenn $F_1 \cdot F_2 \neq 0$, ist der Beweis komplizierter. Man betrachtet eine Folge von Gebieten $\{U_n\}$, für welche $U_1 \supset \dots \supset U_n \supset U_{n+1} \supset \dots \supset F_1 \cdot F_2$ und $U_n \rightarrow F_1 \cdot F_2$ für $n \rightarrow \infty$. Wenn dann S'_n eine Gesamtheit geschlossener Kurven bezeichnet, die die Menge F_1 ganz im Innern enthält, die Menge $F_2 - U_n$ aber im Äußern läßt, und wenn S_n der Teil von S'_n ist, der außerhalb U_n liegt, so zeigt man, daß bei geeigneter Wahl von U_n das Integral (3) mit dem Integrationsweg S_n eine Folge von eind. u. reg. Funktionen $\varphi_n(x)$ definiert, deren S.-M. F'_n die Bedingung $F_1 + U_n \supset F'_n \supset F_1$ erfüllen und für welche die Funktionen $\varphi_n(x) - f(x)$ in $F_1 - F_2$ eind. u. reg. sind. Hiernach bleibt nur, wie im klassischen Mittag-Lefflerschen Falle, mit Hilfe von Korrektionsgliedern $\theta_n(x)$ die Konvergenz der Folge $\varphi_n(x) = \varphi_n(x) + \theta_n(x)$ in jedem Gebiete außerhalb von F_1 und der Folge $f(x) - \varphi_n(x)$ in jedem Gebiete außerhalb von F_2 festzustellen; die Grenzfunktionen $\varphi(x)$ und $f(x) - \varphi(x)$ geben die Zerlegung (2). — Sei jetzt S' eine Separationskurve von F_1 und F_2 (die notwendig durch alle Punkte von $F_1 \cdot F_2$ geht) und sei $S = S' - F_1 \cdot F_2$. Wenn $f(x)/x - a$ auf S im Lebesgueschen Sinne integral ist, konvergieren schon die $\varphi_n(x)$ selbst, und $\varphi(x)$ kann mit Hilfe des Integrals (3) definiert werden. Wenn aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, so muß man für die wirkliche Bestimmung der Zerlegung (2) Kunstgriffe benutzen. Verf. gibt zwei solche Kunstgriffe, die in den meisten Fällen anwendbar sind. Einer von denen führt ihn zu einer Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Runge über die Approximation von analytischen Funktionen. — Im letzten Paragraph des ersten Teiles gibt Verf. Beispiele von Zerlegungen (2) für einige spezielle Funktionenklassen. — Im zweiten Teil gibt Verf. Anwendungen seiner Ergebnisse auf einige funktionentheoretische Fragen. Erstens studiert er von einem topologischen Standpunkt die Zerlegungen (1) einer S.-M. in eine Summe von zwei abgeschlossenen Mengen, in denen die letzten Mengen, in einem oder anderem Sinne, als „einfacher“ als die gegebene S.-M. angesehen werden können. — Dann beschäftigt er sich mit der Verallgemeinerung des Begriffes des Hauptteiles einer analytischen Funktion in einem singulären Punkte und stellt einen Begriff des Hauptteiles einer analytischen Funktion auf einer (fast beliebigen) Teilmenge ihrer S.-M. auf. So kommt er zu einem Satz, der eine genaue, sehr weitgehende Verallgemeinerung des klassischen Mittag-Lefflerschen Satzes darstellt. — Dann betrachtet Verf. Produktdarstellungen einer Funktion, deren einzige Faktoren vorgeschriebene Nullstellen und S.-M. haben. Die Anwendung des Hauptsatzes des ersten Teiles auf den Logarithmus einer analytischen Funktion (der vorläufig durch geeignete Schnitte zu einer eindeutigen Funktion reduziert wird) führt den Verf. zu einem Satz, der sich als Verallgemeinerung des Weierstraßschen Produktsatzes erweist. — Verf. wendet seine Sätze auch auf die Theorie der ganzen Funktionen an. Er zeigt, daß für ganze Funktionen Zerlegungen (2) existieren, in denen die Summanden auch ganz sind und die das Studium einiger Eigenschaften ganzer Funktionen (z. B. der Größenordnung oder der Wertverteilung) ziemlich erleichtern. Solche Zerlegungen werden vom Verf. in zwei verschiedenen Weisen erhalten. Eine Methode besteht in der Anwendung des verallge-

meinerten Rungeschen Satzes (s. erster Teil); die gegebene ganze Funktion wird hier durch einen Summanden in einem Gebiet und durch den anderen in der Komplementärmenge dieses Gebietes approximiert. Die andere Methode besteht in der Einführung analytischer Funktionen mit Singularitäten im Endlichen, welche gewisse Funktionentransformationen den ganzen Funktionen zuordnen (vgl. z. B. Valiron, dies. Zbl. 8, 317 und V. Bernstein, dies. Zbl. 8, 264). Eine geeignete Anwendung des Hauptsatzes auf solche analytische Funktionen und eine spätere Anwendung der inversen Funktionentransformation gibt dann die gewünschte Zerlegung. Verf. kommt auf diese Weise auf einige Sätze über die Größenordnung der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. — In einem letzten Paragraph verallgemeinert Verf. seinen Hauptsatz vom Gebiete der eind. u. reg. Funktionen auf das Gebiet der harmonischen, p -harmonischen und noch anderer Funktionen. Vlad. Bernstein (Milano).

Hiong, King-Lai: Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 14, 233—308 (1935).

L'Aut. développe et complète les résultats donnés sans démonst. dans 3 Notes (*C. R. Acad. Sci.*, Paris 196, 198; ce Zbl. 6, 63; 7, 352; 8, 364). Il démontre d'abord que la fonction $T(r, f)$ de Nevanlinna, attachée à une fonction méromorphe $f(z)$, est analytique par intervalles (comp. Valiron, *C. R. Acad. Sci.*, Paris 194, 1305; ce Zbl. 4, 262) et s'appuie sur cette propriété pour montrer que: si $f(z)$ est d'ordre infini, on peut adjoindre à $T(r, f)$ une fonction croissante $U(r)$, à croissance normale au sens de Borel et Blumenthal, telle que $T(r, f) \leq U(r)$ à partir d'une valeur de r , l'égalité ayant lieu au moins pour des r tendant vers l'infini. On peut en outre supposer $\log U(r)/\log r$ non décroissante et $\log U(r)$ convexe en $\log r$. Toute fonction $\varrho(r)$ non décroissante telle que $U(r)$ définie par $\log U(r) = \varrho(r) \log r$ soit à croissance normale est appelée un ordre de $f(z)$ si $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log U(r)} = 1$. Les théorèmes de Nevanlinna montrent alors que le nombre $n(r, a)$ des zéros de $f(z) - a$ pour $|z| < r$ vérifie la condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, a)}{\log U(r)} = 1 \quad (1)$$

sauf au plus pour deux valeurs de a . Si l'on suppose en outre que $\log U(r)$ a été prise convexe en $\log r$, on peut grâce à un th. de Denjoy (*J. Math. pures appl.* 1910) généraliser le th. d'Hadarnard sur la décomposition en facteurs. Tous ces résultats sont ensuite étendus au cas des fonctions méromorphes d'ordre infini dans un cercle. Puis l'aut. montre que l'on a des propositions comportant la même précision concernant les régions d'accumulation des zéros de $f(z) - a$. Il existe au moins une direction D telle que (1) soit valable pour tous les a sauf deux lorsqu'on se borne à compter les zéros de $f(z) - a$ dans un angle d'ouverture arbitraire et bissectrice D . On généralise de même la notion de point de Borel d'ordre ϱ d'une fonction méromorphe dans un cercle. Enfin, K. L. Hiong montre que, pour qu'une fonction entière dont c_n est le coefficient de z^n dans le développement taylorien, soit d'ordre $\varrho(r)$, il faut et il suffit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log n / \log U \left(|c_n|^{-\frac{1}{n}} \right) \right] = 1;$$

il donne aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour la croissance régulière et étend ces résultats aux fonctions holomorphes d'ordre infini dans un cercle. Les résultats connus de Borel et Lindelöf sur les fonctions entières d'ordre fini positif sont ainsi complètement généralisés. Le Ref. observe que l'exposé peut encore être simplifié: dans la démonstration de l'existence des ordres, on peut remplacer la courbe représentant $T(r, f)$ par une suite des points correspondant à des valeurs de T dont le rapport tend vers 1 et utiliser une fonction élémentaire à croissance normale tendant vers l'infini lorsque r tend vers 1. G. Valiron (Paris).

Spampinato, N.: Estensione nel campo bicompleso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni olomorfe di due variabili complesse. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 22, 38—43 (1935).

Trois nombres bicomplexes x, y, z peuvent être toujours ainsi exprimés:

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2, \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2, \quad z = z_1 v_1 + z_2 v_2,$$

en indiquant avec $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ des nombres complexes ordinaires et avec v_1, v_2 deux unités de l'algèbre des nombres bicomplexes, ayant le tableau de multiplication suivant

$$v_1^2 = v_1, \quad v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0, \quad v_2^2 = v_2$$

(qui met en évidence la réductibilité de l'algèbre susdite). Les groupes (x, y, z) de trois nombres bicomplexes peuvent donc se représenter avec les points $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ d'un S_6 complexe; dans cette représentation, à chaque fonction bicomplexe $z = z(x, y)$ holomorphe suivant Scorza Dragoni [v. G. Scorza Dragoni, Mem. Accad. Ital. 5, 597 (1934); ou ce Zbl. 9, 362] (c'est-à-dire, avec la terminologie de l'a., totalement dérivable), correspond une V_4 — de l' S_6 susdit — nommée V_4 caractéristique. L'a. établit pour ces V_4 des propositions analogues à quelqu'un des théorèmes connus, relatifs aux surfaces caractéristiques de l' S_4 réel qui représente le plan complexe [sur ce sujet cfr. p. ex. B. Segre, Rend. Semin. mat. Roma, II. s. 7 (2. partie), 59 (1930/31); ce Zbl. 3, 213]; p. ex. il démontre que pour chaque surface analytique de S_6 passe une V_4 caractéristique, qui est unique sauf dans des cas exceptionnels bien déterminés. Cet énoncé conduit à généraliser au champs bicomplexe un théorème classique de Levi-Civita, relatif au champs complexe [cfr. T. Levi-Civita, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., V. s. 14, 492 (1905)]. *Beniamino Segre* (Bologna).

Spampinato, N.: Estensione nel campo bicompleso di due teoremi, del Levi-Civita e del Severi, per le funzioni oloedriche di due variabili complesse. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 96—102 (1935).

L'a. commence par montrer comme, de la proposition établie à la fin de la Note I, ou puisse effectivement déduire le théorème de Levi-Civita cité dans la préc. recension de cette Note. Après (en conservant les notations là indiquées) il considère les V_3 analytiques de S_6 qu'il appelle caractéristiques, à savoir les V_3 qui appartiennent à une V_4 caractéristique. Une V_3 analytique de S_4 est définie en donnant x, y, z comme fonctions bicomplexes de trois paramètres (complexes) p_1, p_2, p_3 : afin qu'une telle V_3 résulte caractéristique, il faut et suffit que le déterminant jacobien $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$ soit identiquement nul. D'ici s'ensuit l'extension au champ bicomplexe d'un théorème fondamental de Severi [cfr. F. Severi, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 13, 795 (1931); ou ce Zbl. 2, 342], théorème qui d'ailleurs peut être établi par cette voie comme cas particulier. — [Les formules (8), données au début, ne sont pas correctes; elles doivent être substituées avec les suivantes: $u^2 = u$, $uv = vu = v$, $v^2 = -u$.] *Beniamino Segre* (Bologna).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Rychlik, K.: Bemerkung zu regellosen Folgen von Böhmer. Acad. Tchèque Sci., Bull. int. 34, 15—16 (1933).

Die Zahlenfolge a_0, a_1, a_2, \dots enthalte nur endlich viele verschiedene Zahlen A_1, \dots, A_m , mindestens zwei dieser Zahlen unendlich oft; sie sei ferner hinsichtlich des Vorkommens jeder der Zahlen A_ν eine Bernoullische Wahrscheinlichkeitsfolge, d. h. es möge zu jedem ν eine Zahl w_ν geben, so daß A_ν in jeder der Folgen $a_r, a_{r+k}, a_{r+2k}, \dots$ mit der Wahrscheinlichkeit p_ν vorkommt. Dann hat die durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definierte analytische Funktion den Einheitskreis zur natürlichen Grenze. *Kamke* (Tübingen).

Fréchet, Maurice: Généralisations du théorème des probabilités totales. Fundam. Math. 25, 379—387 (1935).

Die Abhandlung beginnt mit der Bemerkung, daß die Formel, die Ch. Jordan (vgl. dies. Zbl. 10, 173) in Verallgemeinerung der bekannten Poincaréschen Form des Additionstheorems der Wahrscheinlichkeiten unabhängig abgeleitet hat, sich leicht als eine spezielle Folgerung der erwähnten Formel von Poincaré ergibt. Im weiteren werden die genauen Grenzen angegeben, zwischen denen die Wahrscheinlichkeit einer

Summe von Ereignissen eingeschlossen bleiben muß, falls nur die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Summanden (nicht aber diejenigen ihrer Produkte) bekannt sind. Auch der Fall unendlich vieler Summanden wird besprochen. *A. Khintchine.*

Misès, R. de: Deux nouveaux théorèmes de limite dans le calcul des probabilités. *Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, N. s. 1, 61—80 (1935).*

Eine vorläufige Mitteilung zweier außerordentlich allgemeiner Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Genaue Angabe der allgemeinen Voraussetzungen, unter welchen die Behauptungen der beiden Sätze richtig sind, bleiben vorbehalten. Beweis ist nur für einige spezielle Fälle skizziert. Die Behauptungen der Sätze sind die folgenden: I. Si f est une fonction de n variables aléatoires indépendantes, autant dire fonction de n résultats d'épreuves quelconques, et si la valeur de f ne dépend que de la répartition $S_n(x)$ de ces n résultats, alors la distribution de f tend, pour n infini, vers la distribution Gaussienne

$$P_n(x) \sim \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-h^2(x-a)^2} dx.$$

II. Si f est une fonction de n résultats d'épreuves répétées sur un même collectif, fonction dite statistique qui ne dépend que de la répartition $S^n(x)$ de ces résultats et si l'on a arrêté dans une certaine série d'expériences, une répartition qui donne à f la valeur f_0 , alors la probabilité a posteriori pour que ce fait soit dû à une valeur théorique de f qui ne dépasse pas x , est donnée pour n assez grand, par une distribution Gaussienne

$$P_n(x) \sim \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-h^2(x-A)^2} dx$$

dont les paramètres A et h ne dépendent que de la répartition des résultats a_1, a_2, \dots, a_n , notamment de f_0 , mais pas de la probabilité a priori de saisir un collectif présentant une certaine distribution. *A. Kolmogoroff (Moskau).*

Cramér, Harald: Sur les propriétés asymptotiques d'une classe de variables aléatoires. *C. R. Acad. Sci., Paris 201, 441—443 (1935).*

Man weiß nach Kolmogoroff (dies. Zbl. 4, 408 und 5, 172), daß die allgemeinste Form des Verteilungsgesetzes $F(x, t)$ bei einem homogenen zufälligen Prozesse der Änderung einer zufälligen Größe x mit der Zeit t durch die folgende Formel für die charakteristische Funktion $\varphi(u, t)$ dargestellt werden kann:

$$\log \varphi(u, t) = -\frac{1}{2} \sigma_0^2 t u^2 + t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iux} - 1 - iux}{x^2} d(\Omega) x.$$

Es sei jetzt $F^*(x, t) = F(x \sigma \sqrt{t}, t)$, $\varphi^*(u, t) = \varphi\left(\frac{u}{\sigma \sqrt{t}}, t\right)$. Verf. setzt voraus, daß a) für ein bestimmtes $k \geq 3$ der Moment $\alpha_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x, t)$ für jedes t endlich ist, b) entweder $\sigma_0^2 > 0$ oder $\int_{-\infty}^{\infty} \Omega'(x) dx > 0$ ist. Unter diesen Bedingungen erhält Verf. die asymptotische Entwicklung

$$F^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \sum_{r=1}^{n-3} \frac{p_r(x)}{t^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} + R_n(x, t),$$

wobei $|R_n(x, t)| < \frac{C_n}{t^{\frac{n}{2}-1}}$ ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Mazzoni, P.: Sulle aree moltiplicabili. *Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 237—242 (1935).*

Mehrere bekannte Tatsachen betreffend den Unabhängigkeitsbegriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden geometrisch nach der Methode von Cantelli dar-

gestellt. Für die Tatsachen in einer anderen Darstellung vgl. z. B. A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ergebnisse der Mathematik 2, H. 3. Berlin: Julius Springer 1933), Kap. I, § 5, für die Methode von Cantelli vgl. mehrere Arbeiten von Verf. in Giorn. Ist. Ital. Attuari. (Vgl. dies. Zbl. 6, 174.)

A. Kolmogoroff (Moskau).

Lévy, Paul: Sur la sommabilité des séries aléatoires divergentes. Bull. Soc. Math. France 63, 1—35 (1935).

Une série $\sum u_n$ à termes aléatoires est essentiellement divergente, si pour une suite quelconque des constantes d_n la probabilité de la convergence de la série $\sum (u_n - d_n)$ est < 1 . Quel que soit le procédé de sommation considéré, si une série aléatoire à termes indépendants les uns des autres est essentiellement divergente, la probabilité qu'elle soit sommable est nulle. Cette conclusion subsiste pour quelques cas de dépendance entre u_n . Des autres cas dans lesquels des séries essentiellement divergentes peuvent être sommable avec la probabilité 1 sont aussi étudiés. *A. Kolmogoroff*.

Ono, Suminosuke: Generalized theory of vector probability. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 2, 279—303 (1935).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (vgl. dies. Zbl. 2, 145).

A. Khintchine (Saratow).

Laticheva, K.: De la loi de distribution de Gauss pour la fonction de deux variables. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 113—119 (1935) [Ukrainisch].

Es sei $\varphi(x, y)$ eine begrenzte nichtnegative integrierbare Funktion. $\varphi(x, y)$ stellt eine normale Gaußsche Verteilung dar, wenn nur alle entsprechenden Momente zweiter Ordnung endlich sind und bei beliebigen $a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ solche $A > 0$ und $B > 0$ existieren, daß

$$\frac{1}{AB} \varphi\left(\frac{x}{A}, \frac{y}{B}\right) = \frac{1}{a b \alpha \beta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \varphi\left(\frac{x-u}{\alpha}, \frac{y-v}{\beta}\right) du dv$$

ist.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Slutsky, E.: On extrapolation and prognosis. J. Geophys., Moskau 5, 263—278 u. engl. Zusammenfassung 278—279 (1935) [Russisch].

In seinen Monographien „The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Process“ [Problems of Economic Conditions, ed. by Conjunction Institute, Moscow 3, Nr 1, 34—64 u. engl. Zusammenfassung 156—160 (1927), russisch] und „Sur un théorème limite relatif aux séries des quantités éventuelles“ [C. R. Acad. Sci., Paris 185, 169 (1927)] hat Verf. bereits den Beweis erbracht, daß, wenn an einer zufälligen Variablen mit einem konstanten Verteilungsgesetz eine Reihe von gegenseitig unabhängigen Versuchen unternommen wird, ferner die sich hieraus ergebenden Zahlen n -mal durch Summenbildung zu 2 „geglättet“ und von der erhaltenen Reihe wiederum endliche Differenzen m -ter Ordnung genommen werden, die Reihe der letzteren bei genügend großem n und bei $m/n = \text{konst.}$ beliebig wenig von einer sinusoidalen Reihe abweicht. Von diesem interessanten Theorem ausgehend, schlägt Verf. einige Extrapolationsmethoden vor, die in gewissen Fällen — wie etwa bei der Voraussage des Wasserstandes an der unteren Wolga — nachgewiesenermaßen zu guten Ergebnissen führen, deren Anwendungsbereich aber noch gründlich zu untersuchen wäre.

O. Anderson (Sofia).

Nybølle, Hans Cl.: On pseudo-analytical graduation. J. Inst. Actuar. 66, 63 bis 87 (1935).

The author contrasts interpolation by curves passing through given points, with graduation by smooth curves approximately representing the data. He seeks to remove the prevalent objection to graphical methods, and offers a practical procedure which by smoothing of successive derivative curves, yields a satisfactory one of a desired order, say the third derived curve, and thence by integration provides a graduated curve for the original data. Here good judgment and familiarity with related statistics

dictates the choice of the graduated derived curve, while the integrations may be performed in a routine manner either by machine or by clerical assistants. The practical effectiveness of this mode of graduation is illustrated by two applications worked out in detail, namely, (1) the growth-curve, (2) the shrinkage of the generations — both based upon Danish statistics. This method requires no prior assumption concerning the analytic form of the curve, in contrast to the widely adopted methods of moments.

Albert A. Bennett (Providence).

Doob, J. L.: The limiting distributions of certain statistics. *Ann. math. Statist.* 6, 160—169 (1935).

Die Absicht der Arbeit ist, einige neuere Begriffsbildungen und Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie in einer dem Statistiker zugänglichen Form darzulegen, um dann einige Sätze über die Grenzverteilung statistischer Maßzahlen abzuleiten. Insbesondere wird für eine Klasse von solchen Maßzahlen (die u. a. den Korrelationskoeffizienten und die von den Psychologen oftmals gebrauchte „tetrad difference“ enthält) die Normalität der Grenzverteilung bewiesen und eine Formel für deren Streuung angegeben.

A. Khintchine (Saratow).

Leontović, M.: Die Grundgleichungen der kinetischen Gastheorie vom Gesichtspunkt der Zufallsprozesse. *Z. eksper. teoret. Fis.* 5, 211—231 (1935) [Russisch].

Ein Versuch, die kinetische Gastheorie mit Hilfe der Theorie von Markoffschen Ketten systematisch zu entwickeln. Dabei braucht Verf. die stetigen Verallgemeinerungen der Markoffschen Theorie, welche vom Ref. gegeben wurden [Math. Ann. 104, 427 (1931); vgl. dies. Zbl. 1, 149].

A. Kolmogoroff (Moskau).

● **Gebelein, Hans:** Turbulenz. Physikalische Statistik und Hydrodynamik. Berlin: Julius Springer 1935. VIII, 177 S. u. 40 Abb. RM. 12.50.

Ein Versuch, das Turbulenzproblem auf Grund der Heranziehung statistischer Schlussweisen zu lösen. Das Buch beginnt mit der Darstellung der Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im zweiten Kapitel stellt Verf. fest, daß die Grundaufgabe der statistischen Mechanik in der Untersuchung der Übergangswahrscheinlichkeiten im Sinne von sog. Markoffschen Ketten besteht. Diese Untersuchung wurde im Falle eines diskontinuierlichen Phasenraumes von R. v. Mises durchgeführt. Im Falle der Turbulenz ist es aber nach Verf. vorzuziehen, mit dem kontinuierlichen Phasenraum zu arbeiten. Deswegen ist das zweite Kapitel der Kolmogoroffschen Theorie der stetigen Markoffschen Ketten gewidmet. Bei der Betrachtung der Fokker-Planckschen Gleichungen
$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} (a_i v) + \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} (b_{ik} v)$$
 für die Über-

gangswahrscheinlichkeiten finden sich einige fehlerhafte Schlussweisen. Der Satz: „Notwendig und hinreichend dafür, daß ein stochastisches System mit n Freiheitsgraden gegen eine eindeutige Verteilung $\varrho(y)$ als stationäre und ergodische Lösung strebt, ist erstens die Bedingung

$|b_{ik}| = D \neq 0$ und außerdem das Erfülltsein der $\frac{n}{2}(n-1)$ Integrabilitätsbedingungen (45)“

(S. 39), ist falsch. In Wirklichkeit ist im Falle eines geschlossenen Phasenraumes schon die Bedingung $D \neq 0$ hinreichend, aber keineswegs notwendig (vgl. A. Kolmogoroff, dies. Zbl. 7, 22). Dieser Fehler scheint aber für wirkliche Turbulenzprobleme unwesentlich zu sein. Die Bemerkungen auf Seite 44 über die „gefrorenen“ Systeme bei $\lambda \rightarrow 0$ sind jedoch auch unrichtig. Das dritte Kapitel enthält die Grundzüge der vom Verf. vorgeschlagenen statistischen Theorie der Strömungsvorgänge. Weiter folgen: Kap. IV. Kinetische Gastheorie und Navier-Stokessche Hydrodynamik. Kap. V. Theorie des Turbulenzensors und statische Hydrodynamik. Insbesondere findet man hier die endgültigen Grundgleichungen der statistischen Hydrodynamik. Kap. VI. Turbulente Strömungen in Kreisrohren. Kap. VII. Spezielle Probleme turbulenter Strömungen. Kap. VIII. Über die Bedeutung der Verweilzeit für die physikalische Statistik.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Kostitzin, Vladimir: Sur l'intoxication d'un milieu par les produits cataboliques d'une population. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 516—518 (1935).

La solution sous une forme finie de l'équation

$$\frac{dN(t)}{dt} = N(t) \left[\varepsilon - hN(t) - c \int_0^t N(\tau) d\tau \right]$$

considérée par V. Volterra.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Numerische und graphische Methoden.

Bodewig, E.: Über das Eulersche Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen. *Comment. math. helv.* 8, 1—4 (1935).

Enthält historische Notizen und Konvergenzuntersuchung für den Spezialfall einer algebraischen Gleichung. *Rehbock* (Bonn).

Terracini, Alessandro: Un procedimento per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari. *Ric. Ingegn.* 3, 40—48 (1935).

Um ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten zu lösen, kann man eine Gruppe von $m(<n)$ Gleichungen abtrennen, diese Gruppe mit jeder der übrigen $n-m$ Gleichungen verknüpfen und aus jedem der so entstehenden Systeme dieselben m Unbekannten eliminieren. Diese Eliminationen erfordern ihrerseits wieder die Auflösung von Systemen von je m linearen Gleichungen mit m Unbekannten, wobei jedoch die Koeffizientenmatrix immer dieselbe ist und nur die rechten Seiten wechseln. Es ist daher vorteilhaft, hier die reziproke Matrix auszurechnen. Nach Erledigung dieser Elimination hat man dann noch die übrigen $n-m$ Unbekannten aus dem System der $n-m$ Eliminationsgleichungen zu berechnen und endlich die zuerst eliminierten Unbekannten aus (irgendwelchen) m Gleichungen zu bestimmen. — Für die praktische Durchführung empfiehlt es sich, $m = n/2$ oder etwas kleiner zu nehmen. — Das Verfahren läßt eine bessere Ausnützung der Rechenmaschine zu als das gewöhnliche (Gaußsche) Eliminationsverfahren. — Ist n nicht ganz klein, so sind die Hilffsysteme selbst wieder nach diesem Verfahren zu behandeln. — Das Verfahren stimmt mit der beschleunigten Elimination von Mehrke überein [*Math. Ann.* 103, 300—318 (1930); *Z. angew. Math. Mech.* 10, 508—514 (1930); s. etwa *Fortschr. Math.* 56, 1110—1111 (1930); vgl. hierzu auch Worch, *Z. angew. Math. Mech.* 12, 175—181 (1932); dies. *Zbl.* 4, 303], nur daß Mehrke empfiehlt, stets $m=2$ zu nehmen. — Es folgt noch die vollständige Durchrechnung eines Beispiels mit $n=8$.

L. Schrutka (Wien).

Roberts, John L.: Some practical interpolation formulas. *Ann. math. Statist.* 6, 133—142 (1935).

Kerrieh, J. E.: Systems of osculating arcs. *J. Inst. Actuar.* 66, 88—124 (1935).

The author compares two types of systems of osculatory polynomials with the results of pseudo-analytic interpolation obtaining several new formulas adapted for the problem. Finally the work is extended to include irregularly spaced ordinates. As against the uniquely determinate Newton polynomial which is of least order and passes through a given set of distribution values, systems of polynomial arcs are often preferred for interpolation, successive arcs having contact of assigned order at the points of juncture. A "Sprague" system is strictly interpolational while a "Jenkins" system, being not required to pass through the given points in part graduates and in part interpolates. The latter type is in fact obtained by the pseudo-analytic method if in the finally smoothed derived curve, one uses linear interpolation. This latter method has the advantage of separating the features of graduation from those of interpolation. The author approaches his problem from first principles and exhibits the stages at which independent choice must be made. Not only are known formulas exhibited in appropriate setting but several new formulas are secured and the way is open to extend the list indefinitely. For application to unequal intervals adjusted differences are employed in preference to divided differences. A special note is appended on the generalization of the Everett interpolation polynomials. *A. A. Bennett.*

Sobrero, Luigi: Un'osservazione sull'impiego delle formule di quadratura numerica. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 2, 170—173 (1935).

Um bei einem Integral, dessen Integrand an einer Stelle unendlich wird, die Formeln für mechanische Quadratur anzuwenden, wird der Integrand in zwei Faktoren

zerlegt, von denen sich der eine in geschlossener Form integrieren läßt und der andere stetig ist; dann wird Produktintegration angewendet. *Funk (Prag).*

Panow, D.: Über die Koeffizienten der Gregoryschen Formel für die angenäherte Integration. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 67—71 u. deutsch. Zusammenfassung 71 (1934) [Russisch].

Bei der mechanischen Quadratur nach Gregory-Laplace treten als Koeffizienten die Integrale $g_p = \int_0^1 \binom{n}{p} dn$ auf. Für diese Koeffizienten wird auf elementarem Wege die Rekursionsformel

$$g_{p-1} g_1 + g_{p-2} g_2 + \dots + g_0 g_p = -p g_p - (p-2) g_{p-1}$$

hergeleitet, welche zur numerischen Berechnung der g_p geeignet ist. Mit den g_p hängen die Koeffizienten A_m einer Adamsschen Quadraturformel zusammen. Die Summen über g_p , über $(-1)^p g_p$ u. ä. lassen sich leicht angeben. *Theodor Zech.*

Fischer, Alexander: Erwiderung zu: **Mehlig, H.:** Die Verwendung nomographischer Methoden zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 15, 311—312 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 8, 400.

Campbell, Norman: The statistical theory of errors. Proc. Physic. Soc., London 47, 800—809 (1935).

Roman, Irwin: A table of inverse trigonometric functions in radians. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. 40, 307—316 (1935).

Airey, J. R.: The circular sine and cosine functions, argument $\log_e x$. Philos. Mag., VII. s. 20, 731—738 (1935).

Airey, J. R.: The circular and hyperbolic functions argument $x/\sqrt{2}$. Philos. Mag., VII. s. 20, 721—731 (1935).

Zherebnow, P.: Apparat zum Zeichnen von Kurven zweiter Ordnung. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 61—66 u. deutsch. Zusammenfassung 66 (1934) [Russisch].

Ein Apparat zum Zeichnen von Kegelschnitten wird beschrieben. Mit einem Stift fester Länge, der senkrecht auf der Zeichenebene steht, werden auf einem Kegel die Punkte festen Abstandes von der Zeichenebene abgetastet. Der Kegel wird realisiert durch eine Stange, die um eine Achse so drehbar ist, daß sie mit den Mantellinien des Kegels zusammenfallen kann. Achse und Winkel des Kegels sind einstellbar. Das obere Ende des Stiftes ist auf der Stange verschiebbar, das untere trägt das Schreibgerät. *Theodor Zech (Darmstadt).*

Geometrie.

● **Sakellarios, Nilos:** Elemente der analytischen Geometrie. Bd. 2. 2. Aufl. Athen: I. Sidere 1935. 256 S. u. 99 Fig. [Griechisch].

Freeman, J. B.: The space concept. Math. Student 3, 41—49 (1935).

Berichtende Erläuterung der Begriffe Punkt, Gerade und Ebene in der projektiven Geometrie. *K. Reidemeister (Marburg).*

Erdős, P., and G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry. Compositio Math. 2, 463—470 (1935).

Il s'agit d'une généralisation du problème suivant: Parmi 5 points dans un plan, dont il n'y en a pas 3 en ligne droite, on peut toujours en choisir 4 comme sommets d'un quadrilatère convexe. — La généralisation proposée, scindée en deux questions, est la suivante: a) Peut-on déterminer un nombre $N(n)$ de points dans le plan, suffisant pour que parmi eux il soit toujours possible de choisir les sommets d'un polygone à n côtés convexe? — b) Quel est le nombre minimum $N_0(n)$ de points nécessaire

pour que cela soit toujours possible? — L'auteur donne deux preuves qui sont chacune une réponse affirmative à la première question. Toutes deux donnent des valeurs fixées pour $N(n)$ et la première peut être généralisée à un nombre quelconque de dimensions. Mais elles ne fournissent pas la réponse à la seconde question. On sait que $N_0(3) = 2 + 1$, $N_0(4) = 2^2 + 1$, $N_0(5) = 2^3 + 1$; on pourrait conjecturer que $N_0(n) = 2^{n-2} + 1$. S. Bays (Fribourg).

Weaver, J. H.: On isogonal points. Amer. Math. Monthly 42, 496—499 (1935).

Thébault, V.: Sur la géométrie du triangle. I. Triangles bordés de rectangles semblables. II. Sur les triangles podaires. III. Points et droites remarquables du triangle. Mathesis 49, Nr 8, Suppl. 1—23 (1935).

Thébault, V.: Sphères du tétraèdre. Gaz. mat. 41, 172—175 (1935).

Thébault, V.: Sur le tranchet d'Archimède. Enseignement Math. 33, 349—359 (1935).

Ducci, Enrico: Sui poligoni regolari e stellati. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 73, 25—32 (1935).

Myller, A.: Remarque sur l'heptaèdre de Reinhardt. Ann. Sci. Univ. Jassy 21, 244—245 (1935).

Parmi les polyèdres unilatères on considère l'heptaèdre de Reinhardt [Sächs. Ber. 37, 106 (1885)] comme le plus simple. Il y a pourtant un heptaèdre isomorphe à celui-ci qui a cet avantage que le nombre des droites de croisement des faces est réduit à un. Auszug.

Krishnaswami Ayyangar, A. A.: Focal lines of a cone touching four given concurrent planes. Math. Student 3, 56—59 (1935).

The author proofs by geometrical methods the following theorem: the axes of circular cylinders circumscribing a tetrahedron are parallel to the focal lines of a cone touching four concurrent planes parallel to the faces of the tetrahedron; the locus of the focal lines is a cubic cone. (See also V. Ramaswami Aiyar, this Zbl. 10, 267.)

O. Bottema (Deventer, Niederlande).

Ruse, H. S.: The Cayley-Spottiswoode coordinates of a conic in 3-space. Compositio Math. 2, 438—462 (1935).

This paper develops the analytical theory of the conic as an element of ordinary projective space. A conic is represented by 21 homogeneous coordinates, which are the coefficients in the equation of the quadratic complex of lines formed by its secants. Using the notation and formal apparatus of the calculus of four-component spinors the author studies the relations between these coordinates and obtains a covariantive set of identities, thus completing the earlier work of Spottiswoode and the reviewer. Some concise parametric forms for the coordinates of a conic are obtained, e. g. in terms of the Plücker coordinates of two of its tangents and their chord of contact. These are applied to express in analytical form the conditions that a conic should bear various specified relations to given points, lines, or other conics. A large number of formulae are thus obtained in a concise manner, such as the conditions for a conic to break up into a pair of lines, for two conics to intersect, or for a conic and a line to touch. A feature of the paper is the systematic employment of the methods and notation of spinor calculus, which leads to a great gain in conciseness. J. A. Todd (Manchester).

Motzkin, Th.: Sur quelques propriétés caractéristiques des ensembles bornés non convexes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 773—779 (1935).

Das Ergebnis einer früheren Note (dies. Zbl. 11, 411) wird folgendermaßen verschärft: Es sei E eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge in der Ebene und F das unbeschränkte Komplementärgebiet von E . Ist der Rand von F (also der „äußere Rand“ von E) nicht konvex, so gibt es ein $\varrho_0 > 0$ derart, daß zu jedem $\varrho > \varrho_0$ in F wenigstens ein außergewöhnlicher Punkt der Entfernung ϱ von E existiert. — Dieser Satz kann auf eine beliebige Minkowskimetrik übertragen werden. Dagegen wird ge-

zeigt, daß ein zu diesem Fragenkreis gehöriger Satz von Vergnères (dies. Zbl. 8, 339) in einer Minkowskigeometrie nur dann allgemein gilt, wenn die Eichkurve eine Ellipse ist. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Vincensini, Paul: Sur les corps convexes admettant un domaine vectoriel donné. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 761—763 (1935).

Verf. teilt ohne Beweis ein Verfahren mit, das gestattet, zu einem gegebenen konvexen Mittelpunktbereich mit beschränkter Krümmung der Randkurve diejenigen konvexen Bereiche zu finden, deren Vektorenbereich der gegebene ist. Als Haupt Hilfsmittel dient dabei die Bemerkung, daß es unter gewissen Krümmungsbeschränkungen möglich ist, lineare Scharen von konvexen Bereichen für negative Parameterwerte fortzusetzen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Hirakawa, Junkô: The affine breadth and its relation to the relative breadth. Jap. J. Math. 12, 43—50 (1935).

Verf. führt einen Begriff der Affinbreite ein, der dem von ihm untersuchten Begriff der Relativbreite analog ist (vgl. dies. Zbl. 11, 223). Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß eine Eilinie bzw. Eifläche konstante Affinbreite in diesem Sinne besitzt. Ferner wird der in Ergebnissen von Süß [Math. Ann. 96, 251—260 (1926)] enthaltene Satz einfach bewiesen: Hat eine Eilinie (Eifläche) die Eigenschaft, daß die Affinnormalen für je zwei Punkte mit parallelen Tangenten (Tangentialebenen) zusammenfallen, so ist sie eine Ellipse (ein Ellipsoid).

W. Fenchel (Kopenhagen).

Lusternik, L.: Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige meßbare Mengen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 55—58 (1935).

Beweisskizze für die folgende weitgehende Verallgemeinerung des Brunn-Minkowskischen Satzes: A und B seien meßbare Mengen des n -dimensionalen Raumes. Unter $\lambda A + \mu B$, wo $\lambda > 0$, $\mu > 0$, werde die Menge aller Punkte mit den Ortsvektoren der Form $\lambda p + \mu q$ verstanden, wenn p bzw. q unabhängig voneinander die Ortsvektoren der Punkte von A bzw. von B durchlaufen. Dann gilt für die n -dimensionalen Maße J_n dieser Mengen die Brunn-Minkowskische Ungleichung

$$\sqrt[n]{J_n(\lambda A + \mu B)} \geq \lambda \sqrt[n]{J_n(A)} + \mu \sqrt[n]{J_n(B)}.$$

Abgesehen von den trivialen Fällen, daß alle drei Maße verschwinden oder daß A oder B nur aus einem Punkte besteht, gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn A und B (evtl. nach Hinzufügung von Nullmengen) homothetische konvexe Körper sind. Der Beweis verwendet eine unendliche Folge von Steinerschen Symmetrisierungen und Schwarzschen Abrundungen, die A und B in der Grenze in Kugeln überführen und das Maß von $\lambda A + \mu B$ nicht vergrößern.

Ref. bemerkt, daß die Menge $\lambda A + \mu B$ nicht meßbar zu sein braucht, wenn A und B es sind. (Ein Beispiel hierfür ist dem Ref. von H. Busemann mitgeteilt worden.) Aus der Gültigkeit des Satzes für abgeschlossene Mengen ließe sich allerdings die Ungleichung unter den obigen allgemeinen Voraussetzungen für das innere Maß von $\lambda A + \mu B$ folgern. Die Diskussion des Gleichheitszeichens würde dann jedoch neue Überlegungen erfordern.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Radó, Tibor: The isoperimetric inequality on the sphere. Amer. J. Math. 57, 765 bis 770 (1935).

Es sei l die Länge einer einfach geschlossenen Kurve auf der Einheitskugel und a der Flächeninhalt eines der beiden von der Kurve begrenzten sphärischen Bereiche. Dann lautet die isoperimetrische Ungleichung $4\pi a - a^2 \leq l^2$, und das Gleichheitszeichen steht nur für Kreise. Dies ist bisher nur für Kurven bewiesen worden, die in einer Halbkugel enthalten sind [Bernstein, Math. Ann. 60, 117 (1905); Bonnesen, Les problèmes des isopérimètres (Collection Borel), S. 80. Paris: 1929]. Verf. zeigt nun, daß die obige Ungleichung für beliebige Kurven der genannten Art gilt, indem er folgenden Satz beweist: Eine geschlossene Kurve auf der Einheitskugel, die in

keiner offenen Halbkugel enthalten ist, hat eine Länge $\geq 2\pi$, wobei $=$ nur für die aus zwei halben Großkreisen zusammengesetzten Kurven steht. — Es sei gestattet darauf hinzuweisen, daß dieser Satz vom Ref. [Math. Ann. **101**, 238 (1929)] und im Anschluß daran einfacher von Liebmann (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1929**, 392) und Segre (vgl. dies. Zbl. **10**, 271) bewiesen worden ist. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex. Acta Litt. Sci. Szeged **7**, 244—248 (1935).

Es werden nachstehende Sätze bewiesen: Vor.: Es sei F eine Fläche vom Maximalindex, welche eine zu F gehörige Ovaloidschale O besitzt (Verf. hat früher, vgl. dies. Zbl. **12**, 84 bereits gezeigt: mehr als eine Ovaloidschale O kann F nicht besitzen; O kann von keiner anderen Schale der Fläche geschnitten oder berührt werden). Beh.: O kann von keiner Tangentialebene der F geschnitten werden. — Daraus folgen: 1. Die Klasse von F ist eine gerade Zahl, der Klassenindex von F ist Null. 2. F kann keine Regelflächenschale besitzen. 3. Man erhält eine Fläche von gleicher Ordnung und gleichem Index wie F , wenn man O in F durch ein im Innern von O gelegenes Ovaloid ersetzt oder O wegläßt. 4. Die Schalen von F werden von jeder Ebene, welche O schneidet, in Kurven von gerader Klasse geschnitten. — Unter einem Ovaloid wird jede Fläche verstanden, welche zu einer beschränkten Fläche 2. (Realitäts-) Ordnung projektiv äquivalent ist. Über F werden die üblichen Differenzierbarkeits- usw. Voraussetzungen gemacht. Die vorliegende Arbeit stellt einen kleinen, wenig veränderten Teil der früher (dies. Zbl. **12**, 84) angezeigten ungarischen Abhandlung dar. *Haapt.*

Differentialgeometrie:

Bäbler, F.: Über geschlossene ebene Kurven von beschränkter Krümmung. Comment. math. helv. **8**, 5—47 (1935).

Mit C mögen die ebenen, einfach geschlossenen Kurven mit folgenden Eigenschaften bezeichnet werden: Die Tangente existiert überall und ist stetig; die Krümmung existiert „fast überall“ (d. h. mit Ausnahme einer Menge von Kurvenpunkten, die in endlich viele Teilbögen beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden können); wo sie existiert, ist die Krümmung stetig und dem Betrage nach höchstens 1. Für diese Kurven werden die folgenden Extremumprobleme vollständig gelöst: 1. Der Umkreisradius r (≥ 1) von C (d. h. der Radius des kleinsten die Kurve C enthaltenden Kreises) ist gegeben. Die genauen unteren und oberen Schranken der Länge L von C und des von C begrenzten Flächeninhalts F sind zu bestimmen. 2. Der Durchmesser d (≥ 2) von C (d. h. der Maximalabstand zweier Punkte von C) ist gegeben. Die genauen unteren und oberen Schranken von L und F sind zu bestimmen. — Leicht zu beantworten sind diese Fragen bezüglich der oberen Grenze von F und der unteren von L . Diese sind bei beliebigem $r \geq 1$ bzw. $d \geq 2$ endlich und positiv und werden stets erreicht. Die untere Grenze von F ist ebenfalls stets positiv. Erreicht wird sie jedoch nur für $r \leq 1 + 2/\sqrt{3}$ bzw. $d \leq 4$. Für $r > 1 + 2/\sqrt{3}$ bzw. $d > 4$ hat sie einen von r bzw. d unabhängigen Wert und wird nicht angenommen. Die obere Grenze von L ist für $r \leq 1 + 2/\sqrt{3}$ bzw. $d \leq 4$ endlich und wird erreicht. Dagegen ist L für $r > 1 + 2/\sqrt{3}$ bzw. $d > 4$ nicht beschränkt, wie durch Angabe eines bemerkenswerten Beispiels gezeigt wird. In allen Fällen werden die genauen Schranken als Funktionen von r bzw. d und die Extremumkurven, soweit sie existieren, bestimmt. Die Beweise sind elementar, wenn auch zum Teil etwas mühsam. Haupthilfsmittel sind außer einigen Sätzen über konvexe Hülle und konvexe Kurven eine Art Symmetrisierung, die darin besteht, daß ein im Innern der konvexen Hülle gelegener Bogen einer Kurve C nach außen gespiegelt wird, sowie der folgende Satz: Jede Kurve C umschließt einen vollen Einheitskreis und, falls ihr Durchmesser ≥ 4 ist, sogar wenigstens zwei getrennte Einheitskreise.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Santaló Sors, Luis A.: Abwickelbare Flächen, die durch eine Kurve gehen. An. Asoc. españ. Progr. Ci. **1**, 737—743 (1934) [Spanisch].

Kanitani, Jōyō: *Interprétation géométrique des particularisations du repère attaché à une courbe.* Mem. Ryojun Coll. Engrg 8, 85—104 (1935).

Es wird gezeigt, wie man die Achsen des in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 11, 173) eingeführten, eine Kurve Γ des n -dimensionalen Raumes begleitenden Koordinatensystems auch sukzessive berechnen kann. Ferner wird eine Kurve Γ' berechnet, die mit Γ in einem Punkte eine so hohe Berührung aufweist, daß die beiden zugeordneten Koordinatensysteme dort übereinstimmen. *W. Feller* (Stockholm).

Bouligand, Georges: *Sur les conditions de covariance de la sphère de Meusnier.* C. R. Acad. Sci., Paris 201, 700—702 (1935).

Cartan, Émile: *Observations sur la note précédente.* C. R. Acad. Sci., Paris 201, 702 (1935).

Es wird gezeigt, daß die Eigenschaft einer Fläche, in einem Punkte eine eindeutige Meusnierkugel zu besitzen, gegenüber zweimal stetig differenzierbaren Transformationen invariant ist. Im J. Math. pures appl., IX. s. 11 (1932) (vgl. dies. Zbl. 4, 366) hat Bouligand hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit der Meusnierkugel gegeben. Durch eine einfache geometrische Überlegung zeigt nun Cartan, daß auch diese Bedingungen dieselbe Invarianzeigenschaft haben. — Schließlich bemerkt Bouligand gegen eine von Segre (vgl. dies. Zbl. 11, 417) an diesen Bedingungen geübte Kritik, daß es sich nur um eine unklare Ausdrucksweise handle.

W. Feller (Stockholm).

Busemann, Herbert, und Willy Feller: *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen.* Sonderdruck aus: Acta math. 66, 47 S. (1935).

Vgl. dies. Zbl. 11, 417. Es handelt sich darum, wie die klassischen Sätze über die Krümmungen der Kurven einer Fläche, die durch einen festen Punkt gehen, im Fall möglichst geringer Regularitätsangaben modifiziert werden müssen, wobei hauptsächlich, aber nicht durchweg, Konvexität der Fläche bzw. des Flächenstücks vorausgesetzt wird. Von den zahlreichen Ergebnissen seien nur einige erwähnt. P sei ein solcher Punkt einer konvexen Fläche F , in dem F eine Tangentialebene besitzt. Dann werde die „Dupinsche Indikatrix“ folgendermaßen verallgemeinert: Jedem Normalschnitt S durch P ordnen wir zwei Zahlen r und R folgendermaßen zu: K sei ein Kreis, der S in P berührt und der durch einen gegen P rückenden Punkt Q von S geht. r sei die untere, R die obere Grenze des Radius von K beim Grenzübergang. Dabei wird vorausgesetzt, daß Q von einer bestimmten Seite her auf S gegen P rückt. Nun tragen wir \sqrt{r} in der zugehörigen Richtung von P aus in der Tangentialebene von P ab, der Ort der so erhaltenen Punkte heiße die untere Indikatrix von P . Entsprechend kann die obere Indikatrix erklärt werden. Fallen beide Kurven zusammen, so sprechen wir von der Indikatrix schlechtweg. Und nun gilt: Die untere Indikatrix ist stets konvex (aber nicht notwendig beschränkt). Als Indikatrix von P kann jede beliebige konvexe Kurve auftreten, die P im Innern oder am Rande enthält. Die Richtungen nach den Punkten, wo die Indikatrix extreme Entfernung von P hat, sind ihrem sphärischen Bilde parallel (wie die Krümmungsrichtungen im regulären Fall). — In fast allen Punkten eines konvexen Flächenstücks (d. h. bis auf eine Menge vom Maße Null) ist die Indikatrix ein Kegelschnitt vom Mittelpunkt P . — Wenn fast alle Punkte Nabelpunkte (d. h. von kreisförmiger Indikatrix mit dem Bezugspunkt als Mittelpunkt) sind und alle Normalschnitte beschränkte Krümmungen haben, ist die Fläche eine Kugel oder Ebene. Läßt man aber die zweite Voraussetzung fort, so stimmt der Satz nicht mehr: Es wird im Gegenteil ein Beispiel einer geschlossenen differenzierbaren konvexen Fläche angegeben, auf der fast alle Punkte Nabelpunkte einer festen Krümmung k sind ($k = 0$ ist zugelassen) und die im Innern einer Kugel vom Radius $< \frac{1}{k}$ liegt. Dagegen ist ein differenzierbares Flächenstück, auf dem ausnahmslos alle Punkte Nabelpunkte sind, notwendig ein Kugel- oder Ebenenstück. — Nach Lebesgue gibt es zwischen zwei Punkten P, Q einer konvexen Fläche F stets eine kürzeste Verbin-

dungslinie L . Es wird nun gezeigt: Besitzt F in P eine Tangentialebene t , so ist L in P differenzierbar und besitzt eine Schmiegebene, die durch die Flächennormale in P geht. Die Projektion von L auf t hat in P verschwindende Krümmung, auch in dem Fall, daß L selbst keine Krümmung in P besitzt. *Cohn-Vossen (Moskau).*

Da Cunha, Pedro José: Vom Parallelismus der Flächen. An. Asoc. españ. Progr. Ci. 2, 273—279 (1935) [Portugiesisch].

Bespricht einige bekannte, in der Théorie générale des surfaces von Darboux zu findende Tatsachen über Flächen, die zu gegebenen parallel sind. *H. Busemann.*

Myers, Sumner Byron: Connections between differential geometry and topology. I. Simply connected surfaces. Duke math. J. 1, 376—391 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 11, 226. Die in der dort referierten Arbeit beweislos mitgeteilten Ergebnisse werden hier für den Fall einfach zusammenhängender vollständiger Flächen bewiesen und etwas vervollständigt. Es wird das Büschel B der durch einen festen, aber beliebigen Flächenpunkt p gehenden geodätischen Strahlen betrachtet und auf B zwei geometrische Orte festgelegt: 1. der Ort der von p aus ersten konjugierten Punkte r ; 2. der Ort der „Minimalpunkte“. So nennt Verf. einen Punkt q des von p ausgehenden geodätischen Strahls S , wenn der Bogen pq von S die kürzeste Verbindung seiner Endpunkte ist und wenn keine geodätische Verlängerung dieses Bogens über q hinaus diese Eigenschaft hat. Die beiden Orte werden hier nur für den Fall betrachtet, daß die Fläche analytisch ist, Verallgemeinerung wird angekündigt. Die Diskussion wird (in Anbetracht dessen, daß man auf einem geodätischen Strahl einer vollständigen Fläche jede Länge abtragen kann) in eine euklidische Hilfsebene verlegt, indem B auf die naturgemäßen Polarkoordinaten bezogen wird. In dieser Hilfsebene hat der Ort r eine von drei Gestalten; entweder er existiert nicht, oder er besteht aus endlich vielen Zweigen, deren jeder vom Unendlichen zum Unendlichen geht und Strahlen des Büschels zu Asymptoten hat, oder er ist eine einfach geschlossene Kurve. Der letzte Fall scheidet aus, falls die gegebene Fläche der Ebene homöomorph ist, der erste, falls sie der Kugelfläche homöomorph ist. Den Punkten der Hilfskurve, die dem Anfangspunkt möglichst nahe kommen, entsprechen p zugewandte Spitzen des Ortes r auf der Fläche. — Der Ort (m) auf der Fläche ist ein endlicher Graph aus analytischen Bögen. Seine Endpunkte sind mit einigen der erwähnten Spitzen oder ihnen allen identisch. Gehen von einem Punkt von (m) genau k Bögen von (m) aus, so gibt es auch genau k kürzeste (notwendig gleichlange) Verbindungen dieses Punkts mit p . (m) enthält keine einfachgeschlossene Kurve. Dies alles gilt, wenn die Fläche geschlossen ist, und mit dem Ausnahmefall, daß (m) ein einziger Punkt ist; dann sind die Verhältnisse denen auf der Kugelfläche analog. Ist die Fläche offen, so kann (m) aus mehreren Graphen bestehen, jedoch nur so, daß in jedem beschränkten Teilgebiet nur endlich viele Bögen von (m) liegen. Auch kann dann (m) leer sein. Im übrigen hat (m) dieselben Eigenschaften wie im Fall der geschlossenen Fläche. — Die Beweise sind einfach. *Cohn-Vossen (Moskau).*

Sintsov, D. M.: Sur le sens géométrique de l'équation différentielle des surfaces réglées. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 11, 49—53 (1935).

Verf. zeigt unter anderem: Das Produkt der Krümmungen der Asymptotenlinien in einem Flächenpunkt ist in der Form AB darstellbar, wobei A im Reellen nicht verschwindet und, außer für die Kugeln, endlich ist, während B , wenn die Fläche in der Gestalt $z = f(x, y)$ gegeben ist, ein Polynom in den zweiten und dritten Ableitungen von z ist, homogen vom 3. Grad in den zweiten und homogen quadratisch in den dritten Ableitungen von z . Im Reellen sind also die Regelflächen durch $B = 0$ dargestellt. Unter den weiteren Überlegungen der Arbeit ist eine fehlerhaft: Es ist nicht richtig, daß die Regelflächen dadurch gekennzeichnet sind, daß die Projektion der Asymptotenlinien in eine Ebene eine Enveloppe hat. *Cohn-Vossen (Moskau).*

Kubota, Tadahiko: Krümmungstheorie in der relativen Flächentheorie. Jap. J. Math. **12**, 21—26 (1935).

Es wird eine kurze Darstellung der relativen Krümmungstheorie der Flächen bei Zugrundelegung einer beliebigen konvexen Eichfläche ohne parabolischen Punkt gegeben. U. a. werden die relativgeometrischen Analoga des Eulerschen und des dazu dualen Blaschkeschen Satzes abgeleitet. Das vollständige Analogon des Meusnierischen Satzes gilt dann und nur dann, wenn die Eichfläche ein Ellipsoid ist, wie aus einer vom Verf. [Proc. London Math. Soc. (2) **14**, 230—239 (1914)] angegebenen Kennzeichnung des Ellipsoids gefolgert wird. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Terracini, A.: Sulle linee proiettive di una superficie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22**, 125—129 (1935).

Pour une surface S quelconque non développable de l'espace ordinaire on a tout récemment défini deux birapports relatifs à 4 points arbitraires, considérés sur une courbe L de S ; et on a nommé celle-ci une ligne projective de S dans le cas où, pour chaque quaterne de points de L , les deux birapports susdits résultent égaux entre eux [cfr. B. Segre, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 656 et 692 (1935); v. aussi ce Zbl. **12**, 85 et 86, où néanmoins les résultats sont rapportés (d'une façon incomplète) avec des imprécisions et des fautes]. — Dans ce travail l'a. donne deux différentes propriétés caractéristiques des familles simplement infinies de courbes tracées sur S , qui sont constituées par des lignes projectives (la totalité des lignes projectives de S est ∞^3). Le première de ces caractérisations fait intervenir la notion de l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites, notion qui a été introduite depuis peu par l'a. même, d'une façon simple et purement géométrique [cfr. A. Terracini, Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **2**, 401 (1933), ou ce Zbl. **7**, 366]. L'autre propriété caractéristique s'énonce ainsi: ∞^1 lignes projectives et les ∞^1 lignes conjuguées constituent toujours sur S un réseau, pour lequel s'annule la somme du deuxième invariant ponctuel avec le deuxième invariant tangentiel; et réciproquement. *Beniamino Segre* (Bologna).

Bompiani, E.: Invarianti proiettivi di una particolare coppia di elementi superficiali del 2° ordine. Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 237—243 (1935).

Si deux surfaces de l'espace ordinaire, S et S' , possèdent dans deux leurs points distincts et non paraboliques, A et A' , des plans tangents distincts et se coupant le long de AA' , les voisinages du 2^{ème} ordre, σ et σ' , de A, A' sur S, S' admettent un invariant projectif numérique, I ; celui-ci a été récemment introduit avec le calcul par P. Buzano [cfr. P. Buzano, Boll. Un. Mat. Ital. **14**, 93 (1935), ou ce Zbl. **11**, 224], qui en a donné une signification métrique. Ici l'a. parvient à deux interprétations géométriques nouvelles de l'invariant I , ayant caractère projectif. De plus, il introduit des points, des plans et des systèmes nuls invariants projectifs de σ, σ' , et des invariants projectifs numériques relatifs à σ, σ' et à un point, un plan ou une droite. Enfin il démontre que le système des invariants trouvés est complet (et même surabondant). *Beniamino Segre* (Bologna).

Rozet, O.: Sur les surfaces de coïncidence. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 676 bis 683 (1935).

Les surfaces S de coïncidence sont caractérisées par la propriété que toutes les droites canoniques coïncident avec les directrices de Wilczynski. L'auteur montre que celles-ci engendrent deux congruences W [cfr. l'article de l'aut. du ref. Rec. math. Soc. math. Moscou **38**, 81 (1930)]. Les développables en correspondent et interceptent sur S un réseau R . Les quatre nappes focales sont des surfaces de la même classe.

S. Finikoff (Moscou).

Rozet, O.: Sur le faisceau canonique d'une surface. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. **21**, 684—698 (1935).

L'auteur examine le complexe engendré par le faisceau des droites canoniques p attachées aux points x d'une surface S . Parmi les quatre foyers inflexionnels de p

(= le sommet γ du faisceau plan de rayons dont le plan est un plan d'inflexion suivant p pour le cône du complexe (p) de sommet γ) un foyer coïncide avec le point x de S . Si p coïncide avec la tangente canonique t , x est un foyer double et deux autres foyers partagent harmoniquement les foyers x et \bar{x} de la congruence de t . Condition que x soit foyer double ou triple pour tous les rayons du complexe. *S. Finikoff* (Moscou).

Downs jr., Thomas L.: Asymptotic and principal directions at a planar point of a surface. *Duke math. J.* 1, 316—327 (1935).

Si le plan tangent est en contact du $n - 1$ -ordre avec la surface, les n directions pour lesquelles l'ordre du contact s'augmente, sont dites vraies asymptotiques. Les directions qui correspondent aux extremums de $\frac{1}{\sigma}$ (= la dérivée d'ordre $n - 2$ de la courbure normale dans la direction de la courbe même) sont dites vraies principales. Les vraies asymptotiques sont séparées par les vraies principales. Dans la région de la courbure positive les vraies asymptotiques sont imaginaires; la reciproque (si $n > 3$) n'est pas juste. Plusieurs autres propriétés métriques et projectives, en particulier, pour les cas $n = 4$ et $n = 3$; généralisation pour les ombilics. *Finikoff* (Moskau).

Ermolaef, L.: Sur les couples des surfaces dont les asymptotiques se correspondent et qui, aux points homologues, ont une paire de droites conjuguées communes. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 22, 23—29 (1935).

L'auteur détermine le couple des surfaces (M), (N) en question par les composants des déplacements projectifs du tétraèdre MM_1M_2N où M_1 et M_2 sont deux points d'intersection des tangentes asymptotiques de (M) avec le plan tangent homologue de (N). La solution se présente 1° des surfaces minimales-projectives de Thomsen; 2° des couples des surfaces de Demoulin-Godeaux avec les mêmes quadriques de Lie; 3° des surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires; 4° d'une classe particulière des surfaces R dépendant de b constantes arbitraires; 5° d'une nouvelle classe de surfaces dépendant de 3 fonctions d'un argument; 6° des certaines surfaces réglées.

S. Finikoff (Moscou).

Shih, Hsiang-Lin: Associate contact quadrics of a rectilinear congruence. *Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. Peiping A* 3, 185—213 (1935).

S_y, S_z étant les nappes focales d'une congruence H, S_σ, S_ρ — leurs transformées de Laplace, l'auteur examine les quadriques Q_y, Q_σ qui sont en contact du second ordre avec S_y et du premier avec S_σ ou (Q_σ) vice versa; de même les quadriques Q_z, Q_ρ . Les quadriques Q_y, Q_σ coïncident si le réseau focal de S_y est isotherme-conjugué aux invariants ponctuels égaux. Q_y et Q_z sont apolaires si H appartient à un complexe linéaire ou bien si les réseaux focaux sont harmoniques. Les directions pour lesquelles le contact de Q_y s'augmente jusqu'au troisième ordre, déterminent sur S_y un réseau N_1 . L'auteur examine les réseaux N_1 qui coïncident avec les asymptotiques de S_y ou bien qui partagent harmoniquement le réseau focal de S_y . Il examine le complexe tétraédral de droites situées dans les deux plans polaires d'un point par rapport à Q_y et Q_z , le complexe harmonique et le complexe quadratique de Battaglini formés pour les quadriques Q_y, Q_z .

S. Finikoff (Moscou).

Rossinski, Serge: Sur un cas de déformation des congruences isotropes et sur une transformation des surfaces minima qui s'y rattache. *Rend. Circ. mat. Palermo* 59, 82 bis 96 (1935).

L'auteur donne le développement complet des résultats contenus dans ces deux Notes [ce *Zbl.* 8, 176 et 9, 35 (1934)].

S. Finikoff (Moscou).

Rangachariar, V.: Minimal surfaces with reference to the line of striction of the asymptotic lines. *J. Indian Math. Soc.*, N. s. 1, 203—208 (1935).

L'auteur examine les surfaces minimales S dont la ligne de striction L [Weatherburn, *Math. Gaz.* 13 (1926)] des asymptotiques d'une famille les coupe sous un angle constant α . Les deux lignes de striction qui correspondent à deux familles des asym-

ptotiques, coïncident et la surface S est applicable sur un heliocoïde minimum H (si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, S est égale à H). Certaines propriétés de S rappellent les propriétés connues des surfaces réglées (la rotation du plan tangent quand le point du contact se déplace le long d'une asymptotique etc.). S. Finikoff (Moscou).

Demoulin, A.: Sur les congruences de sphères dont la courbure est égale à un. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 21, 770—772 (1935).

Dans un espace euclidien E_n , à $n \geq 3$ dimensions, considérons une $(n-1)$ -sphère, S , dépendant de deux paramètres. En nommant élément linéaire de la congruence, lieu de S , l'angle $d\varphi$ de deux $(n-1)$ -sphères S infiniment voisines et courbure de cette congruence la courbure de la forme quadratique $d\varphi^2$, l'a. démontre que, pour obtenir la congruence de $(n-1)$ -sphères la plus générale dont la courbure est constante et égale à un, il suffit de fixer arbitrairement une surface Σ de E_n et une surface Σ' de E'_3 qui soit applicable sur la première, et d'envisager — pour chaque point O de Σ — la $(n-1)$ -sphère S de centre O et rayon égal à la distance que le point O' , homologue de O sur Σ , a d'un point fixe quelconque de E'_3 . Cette proposition [que l'a. avait déjà prouvée pour $n = 3$ d'une autre façon: v. A. Demoulin, Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 19, 877 (1933), ou ce Zbl. 7, 365] peut, pour $n = 4$, recevoir application dans l'étude des systèmes ∞^2 de complexes linéaires de droites de l'espace ordinaire. Beniamino Segre (Bologna).

Whitehead, J. H. C.: On the covering of a complete space by the geodesics through a point. Ann. of Math., II. s. 36, 679—704 (1935).

This paper is concerned with the development of geodesic polar coordinates for a space with an analytic metric $f(P, dP)$ and their use in the study of two loci associated with the corresponding problem of the calculus of variations. The locus treated in this paper is the conjugate locus. The author first gives a complete existence proof of normal coordinates and obtains the equations that characterise them. The distance $\delta(PQ)$ is then defined in the usual manner — the case treated being not necessarily reversible — and it is shown, by the well known method of showing the existence of the mid point of PQ , that the extremal PQ is a Hilbert curve. — In the following section the analyticity of the transformation to normal coordinates is established and applied to the conjugate locus of the origin, the conjugate locus being the locus of all points where the Jacobian of the transformation to polar geodesic coordinates vanishes. Since $\Delta(\nu, \theta) = 0$ is necessary and sufficient for a conjugate point, the conjugate locus is $(n-1)$ -dimensional. The last two sections are devoted to the conjugate locus itself and it is shown that if P_0 is a conjugate point of order k "the conjugate locus near P_0 is an $(n-k)$ -dimensional envelope of the rays. Each point is the vertex of a k -dimensional cone of rays, the tangents to which generate a k -dimensional cone in the $(n-k)$ -dimensional tangent space of the conjugate locus".

M. S. Knebelman (Princeton).

Mayer, Walther: Die Differentialgeometrie der Untermannigfaltigkeiten des R_n konstanter Krümmung. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 267—309 (1935).

Der h -te Schmiegraum $R_{12\dots h}$ einer $V_m(y)$ in $R_n(x)$ wird bekanntlich durch R_n -Vektoren

$$\frac{\partial^k x}{\partial y^{\alpha_1} \dots \partial y^{\alpha_k}} \quad (k = 1, \dots, h) \quad (1)$$

aufgespannt. Mit R_h soll der zu $R_{12\dots h-1}$ orthogonale, im $R_{1\dots h}$ liegende euklidische Raum bezeichnet werden. e_{μ_k} ist die Projektion von (1) in R_k . (Somit sind die Indizes λ_k, μ_k, ν_k , zusammengesetzte „spezielle“ Indizes von Vitali, die aus $k V_m$ -Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ zusammengestellt werden können.) Der Fundamentaltensor von R_k sei

$$E_{\lambda_k, \mu_k} = e_{\lambda_k} \cdot e_{\mu_k}, \quad (2) \quad \text{während also} \quad e_{\lambda_h} \cdot e_{\mu_k} = 0, \quad (h \neq k). \quad (3)$$

Kontravariante Komponenten v^{ν_k} von $v = v^{\nu_k} e_{\nu_k}$ sind bis auf die additive „Null-Lösung“ von

$$e_{\lambda_k} \omega^{\lambda_k} = 0 \quad (4)$$

bestimmt. (Vgl. von demselben Verfasser: dies. Zbl. 8, 83.) Für die Vektoren e (welche — in den einfachen Indizes ausgedrückt — zu symmetrischen Tensoren führen) bestehen die Frenetschen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial y^a} e_{\lambda k} - \Gamma_{\lambda k a}^{\nu k} e_{\nu k} = T_{\lambda k a}^{\nu k-1} e_{\nu k-1} + e_{\nu k a} \quad (5)$$

(vgl. auch Struik: dies. Zbl. 8, 84). Dabei sind die Γ „Christoffelsche Symbole“ und T Tensoren. Aus (2), (3), (5) folgt

$$E_{\lambda k a, \mu k+1} + T_{\mu k+1 a}^{\nu k} E_{\nu k \lambda k} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y^a} E_{\lambda k, \mu k} - \Gamma_{\lambda k a}^{\nu k} E_{\nu k, \mu k} - \Gamma_{\mu k a}^{\nu k} E_{\lambda k, \nu k} = 0. \quad (6)$$

Diese Gleichungen (2), (3), (5), (6) zusammen mit den Integrabilitätsbedingungen von (5) genügen, um die E, Γ, T aus den symmetrischen Grundtensoren $B_{a_1 \dots a_{2k}}$ zu berechnen. Dabei sind diese Grundtensoren folgendermaßen definiert

$$E_{a_1 \dots a_k, a_{k+1} \dots a_{2k}} dy^{a_1} \dots dy^{a_{2k}} = B_{a_1 \dots a_{2k}} dy^{a_1} \dots dy^{a_{2k}}. \quad (7)$$

Somit genügen die oben aufgestellten Gleichungen [zusammen mit den Integrabilitätsbedingungen von (5)] zur Konstruktion einer V_m (bis auf kongruente Verpflanzung). Kongruente V_m haben gleiche Grundtensoren B und umgekehrt. Daraus folgen einige interessante geometrische Anwendungen, z. B. auf „Einbettungszahl“ von V_m (dazu vgl.: Weise, dies. Zbl. 10, 274) und Interpretation des k -ten Krümmungstensors

$$E_{\lambda k a, \mu k b} - E_{\lambda k b, \mu k a}. \quad (8)$$

(Vgl. auch Bompiani: dies. Zbl. 11, 418.) — Ganz analog können die Frenetschen Formeln für eine V_p in V_m in R_n aufgestellt und behandelt werden. — Für jeden

Vektor v in $R_{12 \dots h}$ gilt natürlich $v = \sum_{k=1}^h v^{\lambda k} e_{\lambda k}$, $v_{\lambda k} = v \cdot e_{\lambda k}$, wo $v_{\lambda k}$ der Bedingung

$$v_{\lambda k} \omega^{\lambda k} = 0 \quad (9)$$

genügen muß. Der Fundamentaltensor von $R_{12 \dots h}$ ist wohl $\sum_{k=1}^h E_{\lambda k, \mu k}$ und es ist $v_{\lambda k} = \sum_{r=1}^h v^{\mu r} E_{\lambda k, \mu r}$. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität des Systems der Parallelverschiebung

$$dv_{\lambda k} = (T_{\lambda k a}^{\nu k-1} v_{\nu k-1} + \Gamma_{\lambda k a}^{\nu k} v_{\nu k} + v_{\lambda k a}) dy^a; \quad v_{\lambda n a} = 0 \quad (k = 1, \dots, h)$$

ist das Verschwinden des h -ten Krümmungstensors. — Die Arbeit endet mit der Aufstellung von Frenetschen Formeln und Konstruktion einer V_m in S_n . (Neben den schon oben erwähnten Arbeiten sind folgende Arbeiten von anderen Autoren zu vergleichen: Bortolotti: dies. Zbl. 1, 168; 3, 322; 4, 415; 9, 273; 10, 38; 12, 177; Davies: dies. Zbl. 12, 87. Der Kürze halber hat sich der Ref. der Vitalischen Indizes bedient.)

Flavaty (Prahá).

Mechanik.

● Julia, Gaston: Exercices d'analyse. Vol. IV. Paris: Gauthier-Villars 1935. 236 pag. Frcs. 60.—.

Woinaroskij, R.: La cinématique du corps solide dans un espace euclidien à n dimensions. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 34—37 (1935).

Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den momentanen Drehzentren von zwei infinitesimalen Bewegungen und der aus ihnen zusammengesetzten Bewegung in einem euklidischen Raum gerader Dimension. W. Fenchel (Kopenhagen).

Véronnet, A.: Sur les cas d'équilibre d'un point. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Ecoles 1, 289—292 (1934).

The cases of equilibrium which arise from a discontinuity of the force vector (though the actual magnitude of the force may be finite, continuous and different from zero) are here considered. Contrast is made with the more classical cases which occur only when the magnitude of the force vanishes. D. C. Lewis (Ithaka).

Laboccetta, L.: Definizione assoluta della durata dell'oscillazione pendolare. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 661—665 (1935).

The essential result of this paper may be stated as follows: Let T be the period of an infinitesimal satellite moving on a great circle of a sphere of constant density (it was shown by Maxwell that T is independent of the radius of the attracting sphere and is completely determined by its density); then the period of oscillation of a pendulum vibrating on a great circle of the sphere is the product of T by the square root of the ratio of the length of the pendulum to the radius of the attracting sphere. The paper closes with some remarks on the laws of similitude in mechanics referring, in particular, to Newton's law of gravitation and Kepler's third law. Murnaghan (Baltimore).

Tzénoff, Iv.: Sur quelques applications mécaniques d'une fonction du second degré. Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.-Math. 30, 181—245 u. franz. Zusammenfassung 246 (1934) [Bulgarisch].

Dans une série de travaux antérieurs, publiés dans l'Ann. Univ. Sofia et ailleurs, l'auteur s'était proposé de trouver des fonctions simples pouvant servir à la formation des équations différentielles du mouvement d'un système quelconque et il a donné un certain nombre de telles fonctions. Dans ce travail il considère une telle fonction (ayant une relation étroite avec l'énergie d'accélération de P. Appell) qu'on forme aisément en partant de l'énergie cinétique du système. — Soit un système holonome dépendant de $n + p$ paramètres: $x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+p}$ et soit $T_0 = \frac{1}{2} \sum m v^2 = \frac{1}{2} (g_{ik} x'_i x'_k + 2g_i x'_i + g)$ son énergie cinétique. L'auteur forme la fonction suivante: $S_0 = S' + S'' - S'''$, où les S ont les valeurs suivantes: (1) $S' = \frac{1}{2} g_{ik} x'_i x'_k$; (2) $S'' = g'_i x'_i x'_k + g'_i x'_i$; (3) $S''' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ek}}{\partial x_i} x'_i x'_k + 2 \frac{\partial g_k}{\partial x_i} x'_i x'_k + \frac{\partial g}{\partial x_i} x'_i \right)$: on obtient S''' en remplaçant dans T_0 les g par leurs dérivées secondes et supprimant tous les termes qui ne contiennent pas x'' . — Avec cette fonction S_0 les équations du mouvement peuvent s'écrire $\frac{\partial S_0}{\partial x'_i} = Q^0_i$ ($i = 1, \dots, n, \dots, n + p$); elles expriment que la fonction $K_0 = S_0 - Q^0_i x'_i$ passe par un extremum. — En imposant au système p nouvelles liaisons non holonomes: $x'_\alpha = a_{\alpha m} x'_m + a_\alpha$ ($m = 1, \dots, n; \alpha = n + 1, \dots, n + p$), on obtient un système non holonome dont les équations du mouvement s'obtiennent en cherchant les extremums de la fonction K_0 , considérée comme fonction de $n + p$ variables x'_i liées par les p relations: $x''_\alpha = a_{\alpha m} x''_m + a'_\alpha x'_m + a'_\alpha$. En désignant par K la fonction obtenue en remplaçant x'_α et x''_α par leurs valeurs données plus haut, les équations du mouvement expriment que la fonction K passe par un extremum. — L'auteur considère ensuite le cas des systèmes comportant un asservissement et forme, au moyen de K , les équations du mouvement. — Le travail est illustré par plusieurs applications de ce procédé à divers problèmes. A. Stogyanoff (Sofia).

● **Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliùboff: Méthodes approchées de la mécanique non linéaire dans leur application à l'étude de la perturbation des mouvements périodiques et de divers phénomènes de résonance s'y rapportant.** (Acad. Sci. Ukraine, Inst. Mécan. d. Construct. Nr. 14.) Kyiv: Acad. Sci. Ukraine 1935. 113 S.

Die Arbeit behandelt die Störung periodischer Bewegungen durch kleine äußere Kräfte. Die Differentialgleichungen lauten $\ddot{x}_k = X^0_k(x_1, \dots, x_n) + \mu X^1_k(x_1, \dots, x_n, t)$. Die ungestörten Kräfte X^0_k sind nichtlinear in den x_k und hängen nicht explizit von der Zeit ab, die Störungskräfte X^1_k sind periodische Funktionen der Zeit mit Frequenz α , hauptsächlich wird der Spezialfall betrachtet, wo sie sich additiv aus einem zeitunabhängigen und einem Sinusglied zusammensetzen; auf diesen beschränkt sich das Referat. μ ist ein kleiner Parameter. Es werden zwei Fälle behandelt: Im ersten besitzen die ungestörten Gleichungen eine einparametrische Schar periodischer Lösungen (mit dem Phasenparameter φ), im zweiten existiert eine zweiparametrische Schar solcher Lösungen (mit dem Phasenparameter φ und einem zweiten Parameter c). Die Frequenz der periodischen Lösungen wird mit ω bezeichnet, und zwar im zweiten Fall mit $\omega(c)$, wobei Abhängigkeit von c ausdrücklich gefordert wird ($\omega'(c) \neq 0$). Die nichtperiodischen Lösungen seien exponentiell gedämpft. Ähnlich wie in früheren Arbeiten

der Verf. (L'application des méthodes de la mécanique non linéaire à la théorie de la perturbation des systèmes canoniques. Kiew 1934; Les méthodes de la mécanique non linéaire appliquées à la théorie des oscillations stationnaires. Kiew 1934; s. dies. Zbl. **10**, 208—209) werden zunächst zwei Methoden angegeben, um nach Potenzen von μ fortschreitende, von säkularen Gliedern freie Entwicklungen der gestörten periodischen Bewegung aufzustellen. Die Konvergenz der Entwicklungen wird nicht untersucht, die erste Näherung wird als ein qualitativ richtiges Bild der gestörten Bewegung angesehen. Resonanzerscheinungen treten ein, wenn ω nahe bei einem ganzzahligen Teil α/p von α liegt (Entfernung von der Größenordnung $\sqrt{\mu}$). (Unterschied gegen den Fall linearer X_k^0 .) Außerhalb dieser Zonen ist die erste Entwicklungsmethode brauchbar („Methode der kleinen Nenner“, weil Nenner auftreten, die in den Resonanzonen klein werden). Asymptotisch stellt sich in diesem Falle nach einem quasistationären Übergangszustand eine fastperiodische Bewegung ein mit Parameterwerten c , die im allgemeinen eine diskrete Menge bilden, und den zwei Frequenzen α und ω_r , wo ω_r sich aus ω und c berechnet. (Unterschied gegen den Fall kanonischer Systeme; s. dies. Zbl. **10**, 208.) Liegt aber ω nahe bei den Resonanzwerten α/p , dann braucht man die zweite Entwicklungsmethode („Methode der synchronisierenden Zonen“), die die kleinen Nenner vermeidet. Die Änderung der maßgebenden Größen ist jetzt von der Größenordnung $\sqrt{\mu}$. Innerhalb eines bestimmten Intervalls um α/p erhält man asymptotisch eine fastperiodische Bewegung mit der einen Frequenz α/p und einer zweiten Frequenz von der Größenordnung $\sqrt{\mu}$. Außerhalb dieses Intervalls entfernt sich die Frequenz der gestörten Bewegung mit der Zeit von der Resonanzlage, so daß dann die erste Methode angewandt werden kann. — Die Arbeit enthält noch zahlreiche Ausführungen über Einzelfälle und Bemerkungen über Anwendbarkeit in der Schwingungstechnik, auf die hier nicht eingegangen werden kann. *Blumenthal.*

Metelizyne, I.: Sur les équations du mouvement d'une système non-holonyme. Wiss. Ber. Moskauer Univ. H. 2, 127—130 u. franz. Zusammenfassung 130 (1934) [Russisch].

Verf. stellt sich die Aufgabe, das Gleichungssystem eines nichtholonomen Systems:

$$M_i \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = \sum_k \lambda_k A_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_i A_{ik} \lambda_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

von den Multiplikatoren λ_i frei zu machen. Er zeigt, daß es dafür genügt, eine der Determinanten $m+1$ -ter Ordnung der Matrix

$$\begin{vmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \\ A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{nm} \end{vmatrix}$$

gleich Null zu setzen. Er betrachtet auch den Fall, daß außer den nichtholonomen noch eine Anzahl holonomer Bindungen besteht. *A. Andronoff, A. Witt* (Moskau).

Narychkina, E.: Sur un problème mixte de la théorie de la propagation des ondes. Publ. Inst. Seismol. Acad. Sci. URSS Nr 38, 1—11 (1934) [Russisch].

Mit Hilfe der Methode von Smirnoff und Soboleff (dies. Zbl. **4**, 279; auch Publ. Inst. Seismol. Ac. Sci. URSS. 1933, Nr 29) studiert die Verf. die Aufgabe über die Schwingungen der elastischen starren und flüssigen (kompressiblen) Halbräume, deren gemeinsame Grenze eine Ebene ist, wenn in Punkten dieser Ebene zu ihr senkrechte Kräfte wirken. *Janczewski* (Leningrad).

Putnis, A.: Sur le théorème de Stokes pour les ellipsoïdes hétérogènes en rotation permanente. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 135—137 (1935).

Wavre, R.: Sur la détermination des densités à l'intérieur d'une figure d'équilibre hétérogène. C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 17) 52, 137—139 (1935).

Astronomie und Astrophysik.

Über die rechnerische Behandlung der Bahnen der Kleinen Planeten. Astron. Nachr. 257, 217—224 (1935).

Hnatek, A.: Über die Unmöglichkeit mehrfacher Lösungen in der Quadratur bei der parabolischen Bahnbestimmung. *Astron. Nachr.* 256, 387—388 (1935).

In Ergänzung früherer Untersuchungen (vgl. dies. Zbl. 12, 130) wird nachgewiesen, daß bei der Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geozentrischen Örtern keine mehrfachen Lösungen auftreten können, wenn sich der Komet im mittleren Ort in Quadraturstellung zur Erde befindet (heliocentrische Längendifferenz des Kometen gegen die Erde $\pm \frac{\pi}{2}$). *Klose (Berlin).*

Silva, Giovanni: Sui sistemi binari dotati di forte moto proprio. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* 94, 309—318 (1935).

Verf. behandelt die Änderung der Bahn infolge der Eigenbewegung. Von Einfluß ist hierbei auch die Radialgeschwindigkeit sowie die Lage der Knoten, wobei auf- und absteigender nicht verwechselt werden dürfen. — Der Einfluß der Änderung des Meridians und der Änderung des Abstandes von der Erde sind:

$$\Delta p = -\mu \alpha \sin \delta (t - t_0) + \text{Präzessionseinfluß},$$

$$\Delta \varrho = 1'02 V \pi d (t - t_0) \cdot 10^{-6}$$

(V Radialgeschwindigkeit, π Parallaxe, d Abstand vom Hauptstern). — Dazu kommt noch der Einfluß auf Knoten und Neigung der Bahn, für den er keine expliziten Formeln entwickelt. — Am Schluß wendet er seine Formeln auf 61 Cygni an, zeigt hierbei, daß der Einfluß jetzt noch nicht bemerkbar ist, aber vielleicht in nicht allzu langer Zeit merkbar werden könnte. *G. Schrutka (Wien).*

● **Aitken, Robert Grant:** The binary stars. (McGraw-Hill astron. ser.) 2. edit. New York a. London: McGraw-Hill Book Co. 1935.

Severny, A.: An estimate of the mass of a degenerate stellar nucleus. *Russ. astron. J.* 12, 29—32 u. engl. Zusammenfassung 32 (1935) [Russisch].

Severny, A.: On the equation of „fit“ in the stars with the massive core. *Russ. astron. J.* 12, 324—330 u. engl. Zusammenfassung 331 (1935) [Russisch].

The possibility of the existence of very high densities of the order of 10^{12} g. per cm^3 in the innermost layers of the stars has been by Milne [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 91, 479 (1931)] and Chandrasekhar [Z. Astrophys. 5, 321 (1932), and Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 91, 456 (1931); cf. this. Zbl. 6, 37, and 2, 101]. In this paper the author discusses the possibility of a temperature and density distribution satisfying the conditions of continuity at the boundary of the core for the star model with a high density core of small radius surrounded by a gaseous atmosphere. The results are applied for deriving approximate estimates of the radius and the mass of the central core. The former is found to equal 0.01—0.001 of the star's radius while the latter is of the order of 10^{33} g. (Milne, see this Zbl. 2, 102.) *Kyryll Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Fessenkoff, B.: Détermination de la polarisation de la couronne solaire. *Russ. astron. J.* 12, 309—321 (1935).

The author has determined the degree of polarisation of the light of the solar corona from plates taken by Blažko at the total eclipse of 1914. He gives diagrams of the isophotal lines in light polarised in different directions, and a table and graph showing the variation of polarisation with height above the sun's surface at various latitudes. The degree of polarisation is found to increase with height in the inner corona, and then decrease again in the outer corona. The probable cause of the polarisation is the scattering of light by free electrons in the corona. The author therefore gives a theoretical calculation of the degree of polarisation resulting from this hypothesis. He finds that it always increases with height above the limb, if the corona be assumed symmetrical, and that it agrees with the observed behaviour for the inner corona. But the subsequent decrease in the outer corona is not explained. After examining possible explanations of this disagreement by instrumental causes, the

author concludes that it is more likely to be due to the non-homogeneous character of the outer corona. The latter is composed of irregular jets of material, which tend to be concentrated towards the sun's equatorial plane. *W. H. McCrea* (London).

Tierey, Georges: Le problème du „déalage“ des phases dans les variations périodiques des céphéides. Arch. Sci. Physiques etc. 17, 179—196 u. 255—288 (1935).

Während die Beobachtungen an δ -Cephei-Sternen zeigen, daß die Extremwerte der Lichtkurve mit denen der Radialgeschwindigkeitskurve zusammenfallen, verlangt die Eddingtonsche Theorie zur Deutung des Lichtwechsels dieser Veränderlichenklasse, daß die Extrema von Helligkeit und Radius zur gleichen Zeit eintreten. Die Ursache dieser Phasenverschiebung der beiden Kurven sieht Verf. in der Eddingtonschen Voraussetzung adiabatischer Schwingungen, wodurch das Problem zu weitgehend vereinfacht würde, und untersucht daher in der vorliegenden Arbeit zwei andere Arten von Schwingungen. Er führt zwei Größen $\tau = 1/r_0$ und $\kappa = r/r_0$ ein (r Mittelpunktsabstand, r_0 Sternradius) und unterscheidet danach gleichförmige und homologe Schwingungen, je nachdem κ für eine bestimmte Schicht konstant oder eine Funktion der Zeit ist. — Im Falle gleichförmiger Schwingungen erhält er aus der hydrodynamischen Grundgleichung für den Gesamtdruck

$$P = \int_0^{r_0} \rho \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{dw}{dt} \right) dr$$

(ρ Dichte, V Potential, $w = dr/dt$). Durch mehrfache Umformung dieser Gleichung unter Benützung der Emdenschen Tafeln für die Polytropenklasse $n = 3$ läßt sich schließlich P als Funktion von r_1 ausdrücken, wobei sich r_1 aus $r_0 = r_{0,i}(1 + r_i)$ ergibt ($r_{0,i}$ Mittelwert von r_0 während einer Schwingung) und Größen 3. Ordnung in r_1 vernachlässigt sind. Es zeigt sich, daß auch bei gleichförmigen Schwingungen die Druckextreme mit denen des Radius zusammenfallen. — In ähnlicher Weise wird die etwas verwickeltere Untersuchung für homologe Schwingungen durchgeführt. Die Schlußgleichung wird nicht als Beziehung zwischen Druck und Radius abgeleitet, sondern es wird durch den Ansatz

$$r_1 = A_i \cos(Nt + N_i), \quad r_{1,0} = A_0 \cos Nt$$

die gesuchte Phasenverschiebung N_i (abhängig vom Mittelpunktsabstand) eingeführt, die sich dann unter vereinfachenden Annahmen angenähert berechnen läßt. Die numerischen Werte findet Verf. in hinreichender Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Klauder (Jena).

Vogt, H.: Zur Theorie der Spiralnebel. Astron. Nachr. 257, 1—6 (1935).

In der vorliegenden Arbeit nimmt Verf. Stellung zu der Kritik Lindblads (dies. Zbl. 10, 426) an einer Arbeit von Lambrecht (dies. Zbl. 10, 321) und damit an der vom Verf. vertretenen Spiralnebeltheorie. Die von Lindblad angeführten Argumente werden sämtlich als unbegründet zurückgewiesen.

Klauder (Jena).

Lindblad, B.: Über die Spiralbildung bei den Nebeln. Astron. Nachr. 257, 195 bis 200 (1935).

In der Arbeit setzt Verf. die Diskussion über seine und die Vogtsche Spiralnebeltheorie fort (dies. Zbl. 10, 321, 426 u. vorsteh. Ref.). Er sucht darin die Frage, ob die Ansatzstellen der Spiralarme am Kern im Raume ruhen oder mit dem Kern mitrotieren, durch Berücksichtigung der Verteilung der Materie in den Armen im ersteren Sinne zu beantworten, da andernfalls die Dichte im Arm nach außen schnell abnehmen und ferner die Zahl der Windungen größer als beobachtet sein müsse. Weiter geht er ausführlich auf den Einwand ein, seine Theorie verlange zu große Abplattungen des Kerns. Schließlich weist er noch auf die Möglichkeit hin, durch Untersuchung von Knicken und Dichteänderungen in den Armen seine Theorie an der Beobachtung zu prüfen.

Klauder (Jena).

Quantentheorie.

Ruark, Arthur E.: Is the quantum-mechanical description of physical reality complete? *Physic. Rev.*, II. s. 48, 466—467 (1935).

Es wird gezeigt, daß der von Einstein, Podolsky und Rosen [*Physic. Rev.*, II. s. 47, 777 (1935); dies. Zbl. 12, 42] erhobene Einwand gegen die Vollständigkeit der quantenmechanischen Beschreibung der atomaren Erscheinungen auf dem von diesen Verfassern aufgestellten Wirklichkeitskriterium beruht, welches in Widerspruch steht zu der Forderung, daß nur eine tatsächlich gemessene physikalische Eigenschaft „wirklich“ sein soll.

O. Klein (Stockholm).

Newing, R. A.: Uncertainty principle and the zero-point energy of the harmonic oscillator. *Nature* 136, 395 (1935).

Es wird die Nullpunktenergie des harmonischen Oszillators aus dem Unbestimmtheitsprinzip abgeleitet.

O. Klein (Stockholm).

Labocetta, Letterio: Il quanto gravitazionale e significato fisico della costante di Keplero. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 1, 384—386 (1935).

Labocetta, Letterio: L'onda di de Broglie e la frequenza di Compton nella meccanica classica. *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* 2, 107—108 (1935).

Spekulationen über Atomkonstanten. In der Note kommen Behauptungen folgender Art vor: $\frac{1}{2} mc^2$ ist die kinetische Energie eines Teilchens, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Bechert (Gießen).

Romaidès, Jean: Sur la relativité du phénomène de la charge électronique. *Prakt. Akad. Athénon* 10, 194—199 (1935).

Die Ladung des Elektrons soll im Anschluß an die frühere Note des Verf. (vgl. dies. Zbl. 12, 183) aus seinem Spin abgeleitet werden. Diese Rechnung ist jedoch falsch.

S. Flüge (Leipzig).

Japolsky, N. S.: A theory of elementary particles. II. Electromagnetic whirls and elementary particles. *Philos. Mag.*, VII. s. 20, 641—706 (1935).

Stueckelberg, E. C. G.: Remarque à propos des temps multiples dans la théorie d'interaction des charges entre elles. *C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc.* 17) 52, 98—101 (1935).

Ableitung der Möllerschen Streuformel aus der von Dirac, Fock und Podolsky gegebenen Form der Quantenelektrodynamik. Ausführliche Diskussion des Problems in *Ann. d. Phys.* wird in Aussicht gestellt.

Waller (Upsala).

Kwal, Bernard: Quelques remarques sur l'électrodynamique de Born et Infeld. *C. R. Acad. Sci., Paris* 200, 1656—1659 (1935).

Die Differentialgleichungen des Feldes und die Vertauschungsregeln werden hingeschrieben für die komplexen Vektoren $\mathfrak{E} + i\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D} + i\mathfrak{B}$.

P. Jordan (Rostock).

Kwal, Bernard: Sur la difficulté concernant l'existence de l'énergie infinie du rayonnement au zéro absolu dans l'électrodynamique quantique. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 776—778 (1935).

Durch eine fehlerhafte Konstruktion gelangt der Verf. zu zwei hermitisch-konjugierten Matrizen C und C^* (also $C + C^*$ und $i(C - C^*)$ sind hermitisch), von denen er meint, daß das Produkt CC^* die Eigenwerte $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ habe. Das ist falsch, da eine Matrix der Form CC^* semidefinit ist, also niemals einen negativen Eigenwert haben kann.

P. Jordan (Rostock).

Kofink, Walter: Behandlung der quantenmechanischen Statistik mit Hilfe von Begriffsbildungen aus der Theorie der linearen Integralgleichungen. Berlin: Diss. 1935. 29 S.

Kreisler, J.: Die Übergangswahrscheinlichkeiten im zweifach angeregten Heliumatom. *Acta Physica Polon.* 4, 151—161 (1935).

Im Heliumatom mit zwei Elektronen in angeregten Zuständen wird die Wahrscheinlichkeit für die folgenden drei Arten von Übergängen untersucht: 1. Strahlungslose Übergänge, bei denen ein Elektron in den Normalzustand fällt, das andere dagegen

aus dem Atom entfernt wird; 2. Strahlungsübergänge, bei denen beide Elektronen angeregt bleiben; 3. Strahlungsübergänge, bei denen ein Elektron in den Normalzustand fällt. Nur die Übergänge der zweiten Art geben zu Spektrallinien im leichter zugänglichen Spektralbereich Anlaß. Die Rechnung zeigt aber, daß Übergänge der ersten und dritten Art so viel wahrscheinlicher sind, daß wenig Aussicht besteht, jene Spektrallinien experimentell nachzuweisen.

R. de L. Kronig (Groningen).

Landau, L., and E. Lifshitz: On the theory of the dispersion of magnetic permeability in ferromagnetic bodies. *Physik. Z. Sowjetunion* 8, 153—169 (1935).

Mit einfachen Ansätzen über die Energie in einem Ferromagneten mit einer Achse leichtester Magnetisierbarkeit wird gezeigt, daß er in Abwesenheit eines äußeren Feldes aus dünnen Schichten besteht, die zur Sättigung magnetisiert sind, aber abwechselnd entgegengesetztes Moment haben. Ihre Dicke hängt von den Ausmaßen des Kristallstückes ab; die Verhältnisse zwischen den Schichten und an der Oberfläche des Kristallstückes lassen sich berechnen. (Auf den Unterschied des Ergebnisses gegen das von Bloch — vgl. dies. Zbl. 3, 423 — wird nur ganz kurz eingegangen.) Bei Einschalten eines äußeren Magnetfeldes verschieben sich die Grenzen zwischen den Schichten, die Geschwindigkeit der Verschiebung wird berechnet, insbesondere das Verhalten in einem periodisch wechselnden Magnetfeld parallel und senkrecht zur Richtung der leichtesten Magnetisierbarkeit.

F. Hund (Leipzig).

Bronstein, M.: Über die Streuung von Neutronen an Protonen. *C. R. Acad. Sci. URSS, N. s.* 3, 75—78 (1935).

Komplettierung der Streutheorie von Wigner (dies. Zbl. 7, 140) für Neutronen an Protonen durch Berücksichtigung des Wechselwirkungsgesetzes von Majorana. Wie Verf. bei der Korr. anmerkt, ist dasselbe Problem neulich von Bethe und Peierls (dies. Zbl. 11, 383) gründlich diskutiert worden.

Waller (Upsala).

Sommerfeld, A., and A. W. Maue: Über den Bremsverlust von Kathodenstrahlen beim Auftreffen auf Atomkerne. *Ann. Physik, V. F.* 23, 589—596 (1935).

Es wird der Gesamtbetrag der Bremsstrahlung für beliebige Energien des auftallenden und austretenden Elektrons ohne Berücksichtigung der Retardierung und Relativität berechnet. Während bereits früher (A. Sommerfeld, vgl. dies. Zbl. 3, 142) ein geschlossener Ausdruck für die Ausstrahlung bei Ablenkung um einen gegebenen Winkel bei gegebenem Geschwindigkeitsverlust angegeben wurde, gelang es damals nicht, die totale Ausstrahlung für beliebige Energieverluste durch Integration der einzelnen Komponenten $|M_x|^2$, $|M_y|^2$, $|M_z|^2$ (die für die Untersuchung der Polarisationsverhältnisse maßgebend sind) über alle Ablenkungswinkel und nachträglicher Summation zu berechnen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich jedoch der vollständige quadratische Betrag $M^2 = |M_x|^2 + |M_y|^2 + |M_z|^2$ für die gesamte durchschnittliche Ausstrahlung bei gegebenem Energieverlust berechnen läßt, und es wird hierfür ein exakter Ausdruck in geschlossener Form durch hypergeometrische Funktionen angegeben.

M. Stobbe (Princeton).

Morse, Philip M., W. P. Allis and E. S. Lamar: Velocity distributions for elastically colliding electrons. *Physic. Rev., II. s.* 48, 412—419 (1935).

Mit Hilfe des Wirkungsquerschnittes für den Austausch von Bewegungsgröße bei elastischen Stößen zwischen Elektronen und Gasmolekülen werden Bedingungsgleichungen für die statistische Verteilungsfunktion von Elektronen in einem Gas aufgestellt. Die Gleichungen werden gelöst teils für ein homogenes elektrisches Feld, teils für den Fall, wo Elektronen von anfänglich gleicher Geschwindigkeit in ein feldfreies Gas eintreten. Durch eine quantitative, experimentelle Untersuchung werden die Resultate vom zweiten Fall bestätigt.

O. Klein (Stockholm).

Zener, Clarence: Diffuse scattering of X-rays by conduction electrons. *Physic. Rev., II. s.* 48, 573—576 (1935).

Verf. untersucht die Streuung von Röntgenstrahlen an Leitungselektronen, welche als vollständig entartetes Elektronengas betrachtet werden. Die quantenmechanischen

Streuformeln werden in interessanter Weise anschaulich gemacht. Verf. findet, daß bei kleinen Streuwinkeln die Streuung an den Leitungselektronen mit abnehmendem Streuwinkel langsamer abnimmt als die diffuse Streuung an den gebundenen Elektronen, so daß bei genügend kleinem Streuwinkel die frühere Streuung überwiegt. *Waller.*

Kristallographie.

● **Tertsch, H.:** Das Kristallzeichnen auf Grundlage der stereographischen Projektion. Wien: Julius Springer 1935. IV, 38 S. u. 34 Abb. RM. 3.60.

Das nützliche Buch kommt besonders den Bedürfnissen des morphologisch orientierten Kristallographen entgegen. Es wird besonderer Wert darauf gelegt, die Länge der begrenzenden Kristallkanten konstruktiv in Abhängigkeit von der Zentraldistanz der begrenzenden Flächen zu finden. Auch die Umkehrung dieser Aufgabe wird behandelt. Die Konstruktionsmethoden beruhen auf möglichst anschaulicher Anwendung der stereographischen Projektion. *F. Laves (Göttingen).*

Niggli, Paul, und Werner Nowacki: Der arithmetische Begriff der Kristallklasse und die darauf fußende Ableitung der Raumgruppen. Z. Kristallogr. A 91, 321—335 (1935).

Es hat sich gezeigt, daß für manche Untersuchungen (s. dies. Zbl. 8, 244) der kristallographische Klassenbegriff von Schoenflies nicht der geeignete ist. Man erhält eine feinere Einteilung in sog. α -Klassen, wenn man die Substitutionsgruppen nach der unimodularen ganzzahligen Äquivalenz aufteilt. Solche α -Klassen gibt es in der Ebene 13. Nowacki stellt im ersten Teil der Arbeit alle α -Klassen des Raumes auf. Er bedient sich dazu geometrischer Überlegungen, indem die verschiedene Stellung der Symmetrieelemente zu den primitiven Translationsrichtungen die Aufspaltung der kristallographischen Klassen bewirkt. Hierdurch ergeben sich 73 α -Klassen, die vollständig beschrieben und an Figuren erläutert werden. Faßt man diese Klassen als Raumgruppen auf, so stellen sie die bereits von E. S. Fedoroff gefundenen symmorphen Raumgruppen dar. — Im zweiten Teil faßt Niggli diese α -Klassen als Deformationsprodukte und Untergruppen aus den Holoedrien der kubischen und der hexagonalen Klasse auf. Diese haben nicht nur ein theoretisches Interesse, sondern es zeigt sich, daß sie zur Beschreibung der Pseudosymmetrien der Raumsysteme verwendet werden können. Ferner wird an Beispielen aus der Glimmergruppe und der Olivin- und Feldspatstruktur die Nützlichkeit und Zweckmäßigkeit der neuen Einteilung gezeigt, ebenso treten die Beziehungen zwischen Struktur und Morphologie klarer hervor. *J. J. Burckhardt (Zürich).*

Seitz, F.: A matrix-algebraic development of the crystallographic groups. III. Z. Kristallogr. A 91, 336—366 (1935).

Nachdem in den beiden vorhergehenden Teilen (II. s. dies. Zbl. 9, 384 und 11, 233) die nötigen Sätze über die kristallographischen Klassen, dargestellt in orthogonaler Form, abgeleitet wurden, versucht Verf. in diesem Teil, daraus auf algebraischem Weg die Raumgruppen herzuleiten. Er kann aber nur zeigen, daß es höchstens die bekannten 230 gibt, denn es fehlt ihm eine Äquivalenztheorie der inhomogenen Substitutionsgruppen, die auf anderer Grundlage bereits so weit entwickelt ist (s. dies. Zbl. 8, 244), um auf algebraischem Wege das Äquivalenzproblem der dreidimensionalen Raumgruppen zu lösen. *J. J. Burckhardt (Zürich).*

Klassische Theorie der Elektrizität.

Puccianti, L.: Chiarimenti sulle induttività elettrica e magnetica in rapporto alla nuova metrologia elettrica. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 187—193 (1935).

Wiśniewski, Felix Joachim: Remarque sur les ondes électromagnétiques de discontinuité. Acta Physica Polon. 4, 17—22 (1935).

Die Relationen für die Sprünge der ersten Ableitungen für elektrischen und

magnetischen Vektor, welche nach den Maxwellschen Gleichungen für das anisotrope Medium längs einer Diskontinuitätsfläche möglich sind, werden aufgestellt. Eine Energiebilanz zu beiden Seiten der Diskontinuitätsfläche wird angegeben.

Rellich (Marburg, Lahn).

Andronesu, Pl.: Beitrag zum Problem der Wechselströme beliebiger Kurvenform.

Es wird gezeigt, daß es nur drei Fälle gibt, in welchen die Effektivwerte der Spannung und der Ströme beliebiger Kurvenformen von zwei parallelgeschalteten Wechselstromkreisen in einer Ebene liegen können.

Autoreferat.

Krasny-Ergen, Wilhelm: Temperaturerhöhung kleiner Körper im Hochfrequenzfeld. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. 46, 85—90 (1935).

Im Anschluß an die früheren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 11, 354) wird die Frage nach den Temperaturgradienten gestellt, wenn in ein elektrisches Strömungsfeld kleine Körper von anderer Leitfähigkeit eingebettet sind. Da für sehr kleine unregelmäßig geformte Körper die Messung sehr schwierig wäre, schlägt er vor, die Messung an geometrisch ähnlichen größeren Modellkörpern vorzunehmen, und berechnet, in welchem Verhältnis die Konstanten des Systems sowie die Potentiale und Feldstärken abgeändert werden müssen, damit die Messung ein ähnliches Bild des wirklichen Verlaufs ergibt. Diese Ähnlichkeitsbeziehungen folgen unmittelbar aus den Maxwellschen und den Wärmeleitungsgleichungen.

F. Noether (Tomsk).

Buchholz, Herbert: Die Wirbelströme in einer Kreislochplatte im Felde eines koaxialen Einzeleleiters. Ann. Physik, V. F. 24, 231—252 (1935).

Verf. behandelt folgendes Problem: Ein gerader Einzeleiter wird von Wechselstrom durchflossen. Er wird konzentrisch umgeben durch einen endlich hohen Kreiszyylinder aus leitendem Material. Gesucht ist die Stromverteilung im Kreiszyylinder. In der Einleitung zeigt Verf., daß dies eine Erweiterung ist eines bereits von P. Debye sowie vom Ref. behandelten Wirbelstromproblems. Die magnetische Feldstärke hat lediglich eine Komponente, welche tangential steht zu den konzentrischen Kreisen des erwähnten leitenden Kreiszyinders. Verf. setzt als Lösung für diese Feldstärkekomponente ein unendliches Integral an, das in den Veränderlichen r und z den Symmetriebedingungen des Problems genügt. Aus den Randbedingungen an der inneren sowie an der äußeren Begrenzungsfläche des Zylinders sowie an dessen oberer und unterer Begrenzungsfläche ergeben sich die Koeffizienten bzw. Funktionen, welche in den Integrenden des besagten Integrals eingehen. Hierauf zeigt Verf., wie der Grenzfall des rechteckigen Stabes (Debyesches Problem) aussieht. Im folgenden Abschnitt berechnet er nach dem Poyntingschen Satze die Energieerzeugung sowie die Blindleistung im Zylinder und drückt diese Größen mittels des erwähnten unendlichen Integrales aus. Als Grenzfälle dieser Energieformeln betrachtet er den rechteckigen Stab sowie den unendlich langen Hohlzylinder. Sodann berechnet er für den allgemeinen Fall den Energieausdruck unter der Voraussetzung, daß entweder Frequenz oder Leitfähigkeit des Zylinders groß sind. In diesem Fall läßt sich das unendliche Integral asymptotisch berechnen, und es entsteht ein einfacher Ausdruck für die erwähnten Energien. Als zweiten Fall setzt er voraus, daß entweder Frequenz oder Leitfähigkeit gering sind (z. B. elektrische Kochplatte), und findet auch hier Näherungsausdrücke für die Energien aus dem allgemeinen Integral. Zum Schluß geht er ein auf den Fall einer dünnen Zylinderhülse. *M. J. O. Strutt* (Eindhoven).

Klassische Optik.

Herzberger, M.: On the fundamental optical invariant, the optical tetrality principle, and on the new development of Gaussian optics based on this law. J. Opt. Soc. Amer. 25, 295—304 (1935).

Der Verf. gibt in dieser Arbeit im wesentlichen eine englisch geschriebene Darstellung seiner früher teils in Zeitschriftenaufsätzen, teils in seinem Buch „Strahlenoptik“

in deutscher Sprache veröffentlichten Untersuchungen, in denen er zeigte, daß sich die bekannten Gesetze und Beziehungen der Gaußschen Optik aus einer optischen Differentialinvariante durch Spezialisierung der dort auftretenden Größen ableiten lassen. *Picht* (Berlin).

Malinowski, Thadée: Sur le critère pour l'aberration sphérique. *Rev. Optique* 14, 265—292 (1935).

The author tries to give a new criterion for the best position of the focal plane in the case of spherical aberration. His paper is based on the investigation of the brightness in the focal plane according to geometrical optics, but he claims to have shown previously, that the consideration of the diffraction effect would not change the general result, especially not in the case of small aberrations. He first investigates systems of the Clairaut type with small aperture and finds that the diffusion (according to a definition of C. F. Gauß) is least if the system is corrected for a zone which is about 7.5 per cent greater than the aperture. — In the second part he tries to transfer his criterion on objectives of high aperture. If the spherical aberration has two or more zones, the results are not more as obvious than before. At the end, the author compares his results with some of the earlier methods of investigating this problem. *M. Herzberger* (Rochester, N. J.).

Nobile, V.: Sulla possibilità di nuovi indirizzi della teoria della rifrazione astronomica e di occasionali contributi alla fisica dell'atmosfera I and II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 21, 615—620 u. 675—678 (1935).

The construction of a satisfactory theory of astronomic refraction to give the necessary correction to the astronomer to give the exact position of a star, is prevented by our too small knowledge of the physical constitution of the atmosphere. The author develops first the formulae, that can be derived from the law of Fermat and shows the way to determine the refraction index out of the physical qualities of the atmosphere, which are known to us. But he thinks this way to be insufficient. Another attempt is to develop the formulae for the deviation by astronomic refraction into a series and to discuss the first members of these series which are simplified by introduction of suitable variables. — The discussion is continued in the second paper and the author suggests the investigation of the known observation material, and some other material, which should be easy to get, in the light of this method.

Herzberger (Rochester).

Glaser, Walter: Zur Bildfehlertheorie des Elektronenmikroskops. *Z. Physik* 97, 177—201 (1935).

Der Brechungsindex des elektromagnetischen Feldmediums der geometrischen Elektronenoptik drückt sich durch das skalare und durch das Vektorpotential aus. Die Elektronenstrahlen bestimmen sich aus dem Fermatschen Prinzip. Drückt man die beiden Potentiale durch Potenzreihen aus, setzt diese bzw. die ersten Glieder in die Lagrangesche Funktion ein und setzt die sich aus der Lagrangeschen Funktion ergebenden Bewegungsgleichungen an, so lassen sich hieraus die Gesetze der Gaußschen Optik ableiten. Durch Einführung der Seidelschen Koordinaten leitet der Verf. anschließend die Bildfehler der geometrischen Elektronenoptik erneut ab und diskutiert besonders die Zerdrehungsfehler, von denen es drei gibt, die der Verf. als „anisotropes Koma“, „anisotrope sphärische Aberration“ und „anisotrope Verzeichnung“ bezeichnet. Ferner wird der Einfluß der Blendenstellung auf die Abbildung untersucht. Endlich wird für das allgemeine rotationssymmetrische Mittel ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß die Zerdrehungsfehler identisch verschwinden. *Picht* (Berlin).